

第一章 绪 论

§ 1-1 结构力学的研究对象和任务

一、结构的定义:由基本构件(如拉杆、柱、梁、板等)按照合理的方式所组成的构件的体系,用以支承荷载并传递荷载起支撑作用的部分。

注:结构一般由多个构件联结而成,如:桥梁、各种房屋(框架、桁架、单层厂房)等。最简单的结构可以是单个的构件,如单跨梁、独立柱等。

二、结构的分类:由构件的**几何特征**可分为以下三类

1. 杆件结构——由杆件组成,构件长度远远大于截面的宽度和高度,如梁、柱、拉压杆。
2. 薄壁结构——结构的厚度远小于其它两个尺度,平面为板曲面为壳,如楼面、屋面等。
3. 实体结构——结构的三个尺度为同一量级,如挡土墙、堤坝、大块基础等。

三、课程研究的对象

- ◆ **材料力学**——以研究单个杆件为主
- ◆ **弹性力学**——研究杆件(更精确)、板、壳、及块体(挡土墙)等非杆状结构
- ◆ **结构力学**——研究平面杆件结构

四、课程的任务

1. 研究结构的组成规律,以保证在荷载作用下结构各部分不致发生相对运动。探讨结构的合理形式,以便能有效地利用材料,充分发挥其性能。
2. 计算由荷载、温度变化、支座沉降等因素在结构各部分所产生的内力,为结构的强度计算提供依据,以保证结构满足安全和经济的要求。
3. 计算由上述各因素所引起的变形和位移,为结构的刚度计算提供依据,以保证结构在使用过程中不致发生过大变形,从而保证结构满足耐久性的要求。

§ 1-2 结构计算简图

一、计算简图的概念:将一个具体的工程结构用一个简化的受力图形来表示。

选择计算简图时,要它能反映工程结构物的如下特征:

1. 受力特性(荷载的大小、方向、作用位置)
2. 几何特性(构件的轴线、形状、长度)
3. 支承特性(支座的约束反力性质、杆件连接形式)

二、结构计算简图的简化原则

1. 计算简图要尽可能反映实际结构的主要受力和变形特点,使计算结果安全可靠;
2. 略去次要因素,便于分析和计算。

三、结构计算简图的几个简化要点

1. 实际工程结构的简化:由空间向平面简化
2. 杆件的简化:以杆件的轴线代替杆件
3. 结点的简化:杆件之间的连接由理想结点来代替

(1) **铰结点**:铰结点所连各杆端可独自绕铰心自由转动,即各杆端之间的夹角可任意改变。不存在结点对杆的转动约束,即由于转动在杆端不会产生力矩,也不会传递力矩,只能传递

轴力和剪力，一般用小圆圈表示。

(2) **刚结点**：结点对与之相连的各杆件的转动有约束作用，转动时各杆间的夹角保持不变，杆端除产生轴力和剪力外，还产生弯矩，同时某杆件上的弯矩也可以通过结点传给其它杆件。

(3) **组合结点（半铰）**：刚结点与铰结点的组合体。

4. 支座的简化：以理想支座代替结构与其支承物（一般是大地）之间的连结

(1) **可动铰支座**：又称活动铰支座、链杆支座、辊轴支座，允许沿支座链杆垂直方向的微小移动。沿支座链杆方向产生一个约束力。

(2) **固定铰支座**：简称铰支座，允许杆件绕固定铰铰心有微小转动。过铰心产生任意方向的约束力（分解成水平和竖直方向的两个力）。如预制柱插入杯形基础，四周用沥青麻丝填实。

(3) **固定支座**：不允许有任何方向的移动和转动，产生水平、竖直及限制转动的约束力。

(4) **定向支座**：又称滑动支座，允许杆件在一个方向上滑动，限制在另一个方向的运动和转动，提供两个约束力。

四、结构计算简图示例

§ 1-3 平面杆件结构和荷载的分类

一、平面杆件结构的分类

（一）按结构的受力特点分类

1. **梁**：是一种受弯构件，轴线常为一直线（水平或斜向），可以是单跨梁，也可以是多跨连续梁，其支座可以是铰支座、可动铰支座，也可以是固定支座。

2. **刚架**：由梁和柱组成，具有刚结点。刚架杆件以受弯为主，所以又叫梁式构件。各杆会产生弯矩、剪力、轴力，但以弯矩为主要内力。

3. **桁架**：由若干直杆在两端用铰结点连接构成。桁架杆件主要承受轴向变形，是拉压构件。支座常为固定铰支座或可动铰支座，当荷载只作用于桁架结点上时，各杆只产生轴力。

4. **组合结构**：由梁式构件和拉压构件构成。即结构中部分是链杆，部分是梁或刚架，在荷载作用下，链杆中往往只产生轴力，而梁或刚架部分则同时还存在弯矩与剪力，

5. **拱**：一般由曲杆构成，在竖向荷载作用下有水平支座反力。拱内不仅存在剪力、弯矩，而且还存在轴力。

（二）按几何组成分类

1. 静定结构：由静力平衡条件求解

2. 超静定结构：由静力平衡条件和结构的变形几何条件共同求出。

二、荷载的分类

荷载是主动作用在结构上的外力，如结构自重、人群、水压力、风压力等。

（一）按作用范围分类

1. 分布荷载：体荷载——面荷载——线荷载（均布、非均布）

2. 集中荷载：如吊车轮压、汽车荷载等

（二）按作用时间分类

1. 恒载：永久作用在结构上。如结构自重、永久设备重量。

2. 活载：暂时作用在结构上。如人群、风、雪及车辆、吊车、施工荷载等。

（三）按作用位置的变化情况分类

1. 固定荷载：作用位置固定不变的荷载，如所有恒载、屋楼面均布活荷载、风载、雪载等。
2. 移动荷载：在荷载作用期间，其位置不断变化的荷载，如吊车荷载、火车、汽车等。

（四）按作用性质分类

1. 静力荷载：荷载不变化或变化缓慢，不会是结构产生显著的加速度，可忽略惯性力的影响。
2. 动力荷载：荷载（大小、方向、作用线）随时间迅速变化，使结构发生不容忽视的惯性力。例如锤头冲击锻坯时的冲击荷载、地震作用等。

§ 1-4 结构力学的学习方法

一、课程定位：土建工程专业的一门主要技术基础课，在专业学习中有承上启下的作用

二、学习方法

1. 注意理论联系实际，为后续专业课的学习打基础
2. 注意掌握分析方法与解题思路
3. 注意对基本概念和原理的理解，多做习题

第二章 平面体系的几何组成分析

§ 2-1 概 述

一、研究体系几何组成的目的

1. 前提条件：不考虑结构受力后由于材料的应变而产生的微小变形，即把组成结构的每根杆件都看作完全不变形的刚性杆件。
2. 几何不变体系：在荷载作用下能保持其几何形状和位置都不改变的体系。
几何可变体系：在荷载作用下不能保持其几何形状和位置都不改变的体系。

注意：建筑结构必须是几何不变的。

3. 研究体系几何组成的目的

- （1）研究几何不变体系的组成规律，用以判定一结构体系是否可作为结构使用；
- （2）明确结构各部分在几何组成上的相互关系，从而选择简便合理的计算顺序；
- （3）判定结构是静定结构还是超静定结构，以便选择正确的结构计算方法。

二、相关概念

1. 刚片：假想的一个在平面内完全不变形的刚性物体叫作刚片。

注：（1）在平面杆件体系中，一根直杆、折杆或曲杆都可以视为刚片，并且由这些构件组成的几何不变体系也可视为刚片。地基基础也可视为一个大刚片。

- （2）刚片中任意两点间的距离保持不变，所以可由刚片中的一条直线代表刚片。

2. 自由度

（1）自由度的概念：体系运动时，用以确定体系在平面内位置所需的独立坐标数。（2）一个点：在平面内运动完全不受限制的一个点有2个自由度。

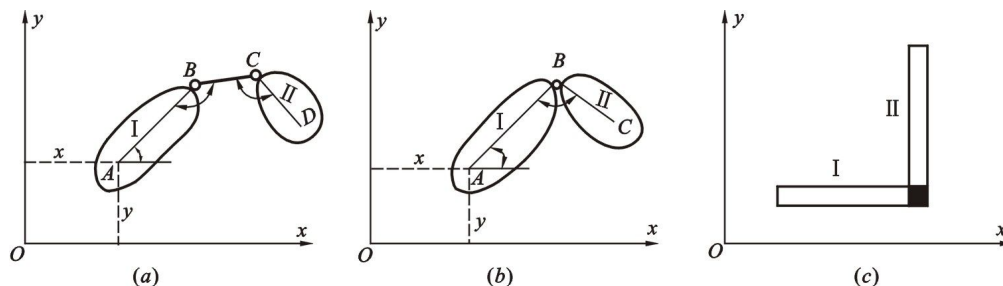
一个刚片：在平面内运动完全不受限制的一个刚片有3个自由度。

注：由以上分析可见，凡体系的自由度大于零，则是可以发生运动的，位置是可以改变的，即都是几何可变体系。

3. 约束

(1) 定义：又称联系，是体系中构件之间或体系与基础之间的联结装置。限制了体系的某些方向的运动，使体系原有的自由度数减少。也就是说约束，是使体系自由度数减少的装置。

(2) 约束的类型：链杆、铰结点、刚结点（图 1）



链杆：一根单链杆或一个可动铰（一根支座链杆）具有 1 个约束，如图（a）。

单铰结点：一个单铰或一个固定铰支座（两个支座链杆）具有 2 个约束，如图（b）。

单刚结点：一个单刚结点或一个固定支座具有 3 个约束，如图（c）。

单约束：连接两个物体的约束叫单约束。

复约束：连接 3 个（含 3 个）以上物体的约束叫复约束。

1) 复铰结点：若一个复铰上连接了 N 个刚片，则该复铰具有 $2(N-1)$ 个约束，等于 $(N-1)$ 个单铰的作用。

2) 复刚结点：若一个复刚结点上连接了 N 个刚片，则该复刚结点具有 $3(N-1)$ 个约束，等于 $(N-1)$ 个单刚结点的作用。

(3) 必要约束：使体系自由度数减少为零所需的最少约束。

多余约束：体系上约束数目大于体系的自由度数，则其差值就是多余约束。

4. 实铰与虚铰

(1) 实铰的概念：由两根直接相连接的链杆构成。

(2) 虚铰的概念：虚铰是由不直接相连接的两根链杆构成的。虚铰的两根链杆的杆轴可以平行、交叉，或延长线交于一点。

(3) 虚铰的作用：当两个刚片是由有交汇点的虚铰相连时，两个刚片绕该交点（瞬时中心，简称瞬心）作相对转动。从微小运动角度考虑，虚铰的作用相当于在瞬时中心的一个实铰的作用。

三、平面体系的自由度计算

1. 体系与基础相连时的自由度计算公式： $W = 3m - (3g + 2j + r)$

注：支座链杆数是把所有的支座约束全部转化为链杆约束所得到的。

2. 体系不与基础相连时的自由度计算公式

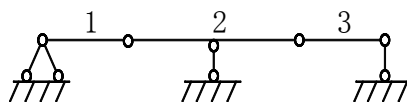
体系不与基础相连，则支座约束 $r = 0$ ，体系对基础有 3 个自由度，仅研究体系本身的内部可变量 V ，可得体系自由度的计算公式为： $W = V + 3$

得 $V = W - 3 = 3m - (3g + 2j) - 3$

例 1. 求图示多跨梁的自由度。

解： $W = 3m - (3g + 2j + r) = 3 \times 3 - (2 \times 2 + 4) = 1$

因 $W > 0$ ，体系是几何可变的。

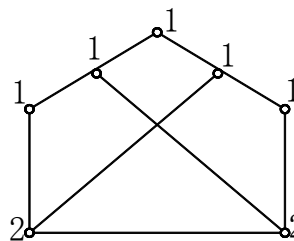


例 2. 求图示不与基础相连体系的自由度。

解： 体系内部可变量

$$V = 3m - (3g + 2j) = 3 \times 7 - 2 \times 9 - 3 = 0$$

故体系几何不变。



3. 体系自由度的讨论

(1) $W > 0$, 自由度数 $>$ 约束数目, 体系几何可变

(2) $W = 0$, 具有使体系几何不变所需的最少约束

(3) $W < 0$, 自由度数 $<$ 约束数目, 体系具有多余约束 (可能是几何可变体系, 也可能是超静定结构)

注: $W \leq 0$ 是体系几何不变的必要条件。

§ 2-2 无多余约束的几何不变体系的组成规则

一、一点与一刚片

1. 规则一: 一个点与一个刚片之间用两根不在同一条直线上的链杆相连, 组成无多余约束的几何不变体系。

2. 结论: 二元体规则

(1) 二元体: 两根不在同一条直线上的链杆联接一个新结点的装置。

(2) 二元体规则: 在一已知体系中增加或减少二元体, 不改变原体系的几何性质。

注: 利用二元体规则简化体系, 使体系的几何组成分析简单明了。

二、两刚片规则

1. 规则二: 两个刚片用一个单铰和杆轴不过该铰铰心的一根链杆相连, 组成无多余约束的几何不变体系。

2. 推论: 两个刚片用不全交于一点也不全平行的三根链杆相连, 组成无多余约束的几何不变体系。

三、三刚片规则

1. 规则三: 三个刚片用不全在一条直线上的三个单铰 (可以是虚铰) 两两相连, 组成无多余约束的几何不变体系。

2. 铰接三角形规则: 平面内一个铰接三角形是无多余约束的几何不变体系。

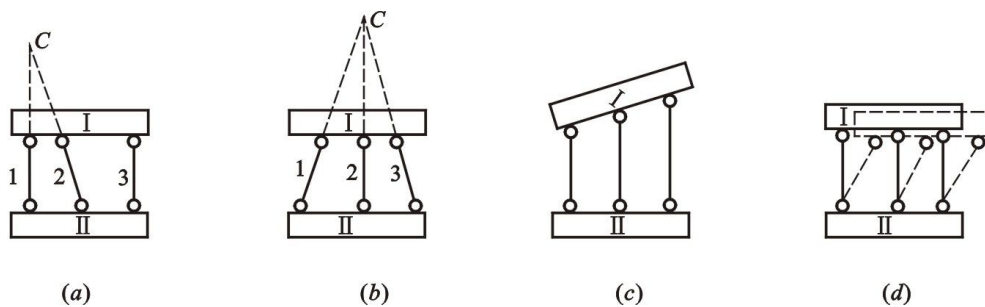
注意: 以上三个规则可互相变换。之所以用以上三种不同的表达方式, 是为了在具体的几何组成分析中应用方便, 表达简捷。

四、瞬变体系的概念

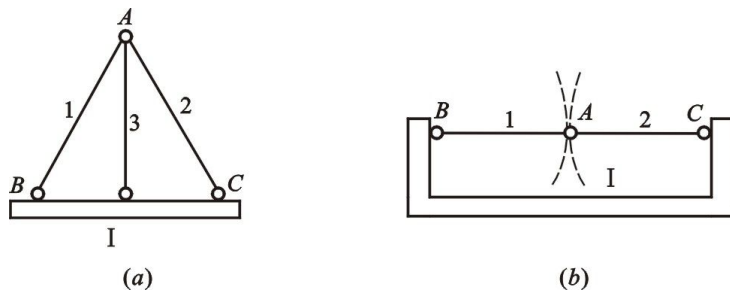
1. 瞬变体系的几何组成特征: 在微小荷载作用下发生瞬间的微小刚体几何变形, 然后便成为几何不变体系。

2. 瞬变体系的静力特性: 在微小荷载作用下可产生无穷大内力。因此, 瞬变体系或接近瞬变的体系都是严禁作为结构使用的。

注: 瞬变体系一般是总约束数满足但约束方式不满足规则的体系, 是特殊的几何可变体系。



如上图 2 (a)，体系是几何不变的；图 (b) (c) 体系是几何瞬变的；图 (d) 是几何常变的。



如上图 3(a)，体系仍是几何不变的，但有一多余约束；在图 3(b) 中，两链杆 1、2 在一条直线上，体系是几何瞬变的。

五、几何组成分析举例

几何组成分析的一般要领是：先将能直接观察出的几何不变部分当作刚片，并尽可能扩大其范围，这样可简化体系的组成，揭示出分析的重点，便于运用组成规则考察这些刚片间的联结情况，作出结论。

下面提出几个组成分析的途径，可视具体情况灵活运用：

(1) 当体系中有明显的二元体时，可先依次去掉其上的二元体，再对余下的部分进行分析。如图 4 所示体系。

(2) 当体系的基础以上部分与基础间以三根支承链杆按规则二相联结时，可先拆除这些支杆，只就上部体系本身进行分析，所得结果即代表整个体系的组成性质。如图 5 所示体系。

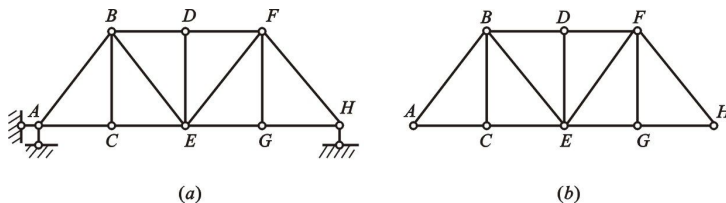


图 5

(3) 凡是只以两个铰与外界相连的刚片，不论其形状如何，从几何组成分析的角度看，都可看作为通过较心的链杆。如图 6 所示体系。

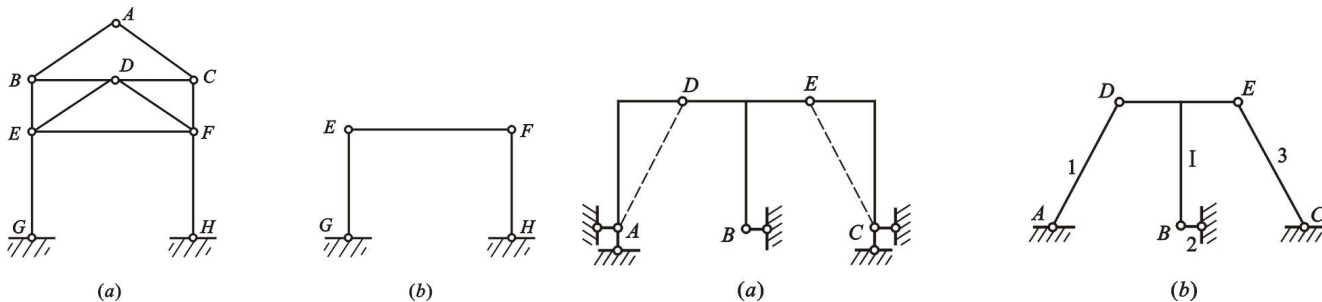
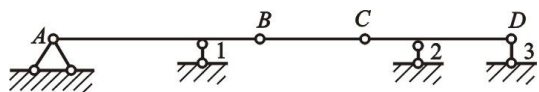


图 4

图 6

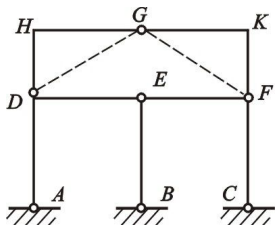
例 2.1 对下列图示各体系作几何组成分析。(简单规则的一般应用方法)。

(1)



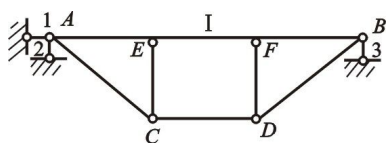
无多余约束的几何不变体系

(2)



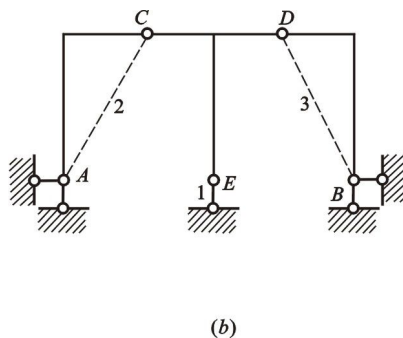
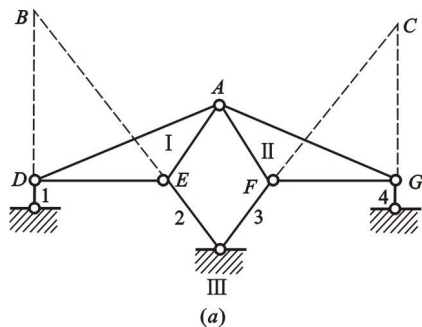
无多余约束的几何不变体系

(3)



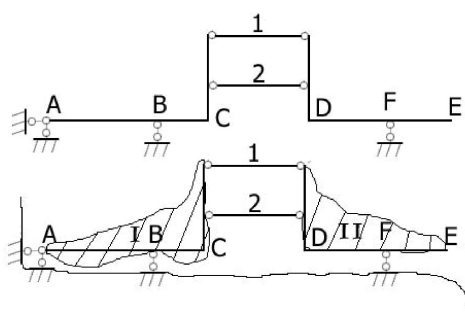
有一个多余约束的几何不变体系
(任一链杆均可视为多余约束)

(4)

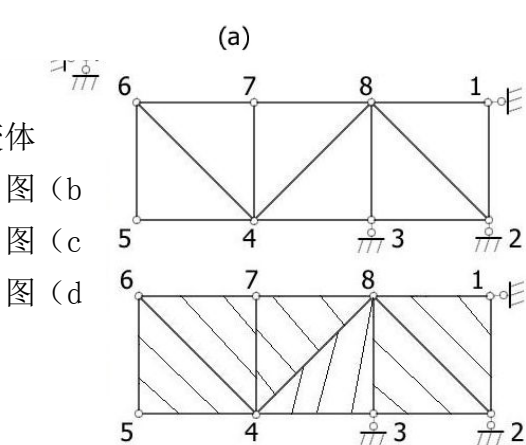


图(a)三铰不共线为无多余约束的几何不变体系；图(b)三链杆延长交于一点是瞬变体系。

例 2.2 对下列图示体系作几何组成分析。



(b)



(c)

不变体

图(b)

图(c)

图(d)

图(a)为无多余约束的几何体系；

为无多余约束的几何不变体系；

是少一个约束的几何可变体系；

为无多余约束的几何不变体系。

例 2.3 对下列图示体系作几何组成分析（说明刚片和约束的恰当选择的影响）。

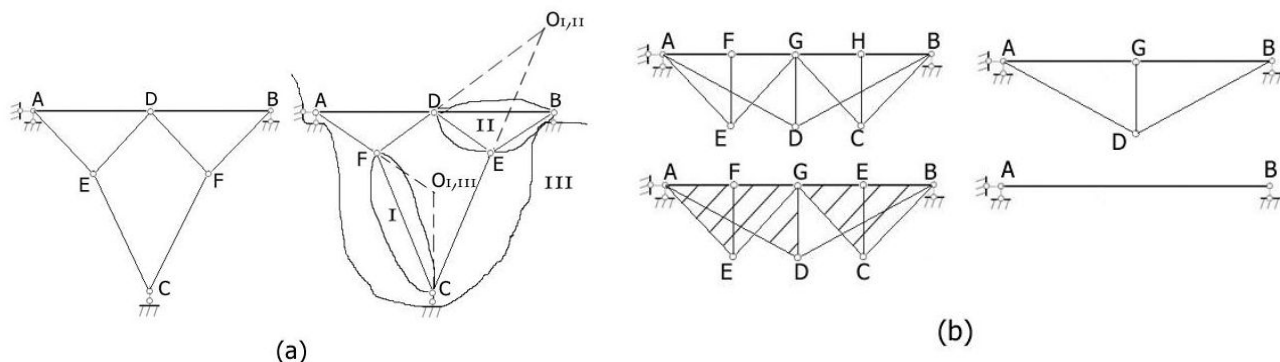


图 (a) 三个虚铰不共线为无多余约束的几何不变体系；图 (b) 为无多余约束的几何不变体系。

注意：三个刚片的三个单铰有无穷远虚铰情况

1. 两个平行链杆构成沿平行方向上的无穷远虚铰。
2. 三个刚片由三个单铰两两相连，若三个铰都有交点，容易由三个铰的位置得出体系几何组成的结论。当三个单铰中有或者全部为无穷远虚铰时，可由分析得出以下依据和结论：

(1) 当有一个无穷远虚铰时，若另两个铰心的连线与该无穷远虚铰方向不平行，体系几何不变；若平行，体系瞬变。

(2) 当有两个无穷远虚铰时，若两个无穷远虚铰的方向相互不平行，体系几何不变；若平行，体系瞬变。

(3) 当有三个无穷远虚铰时，体系瞬变。

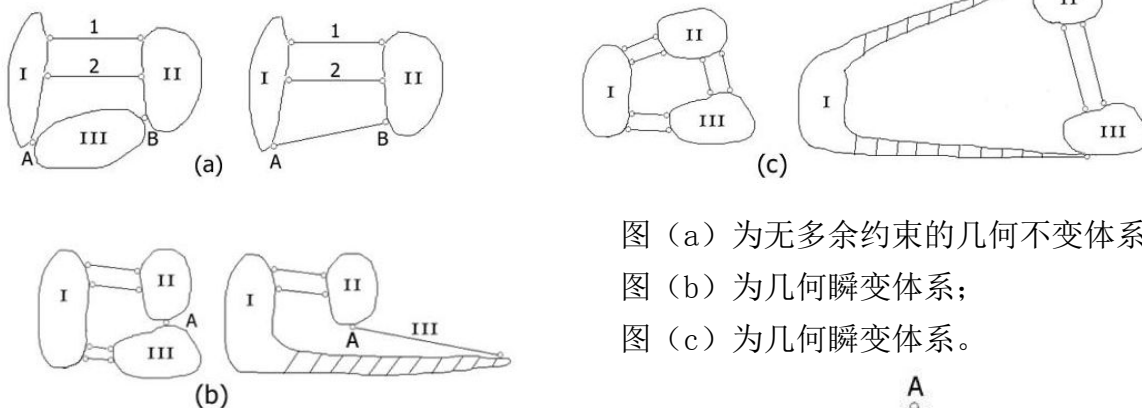
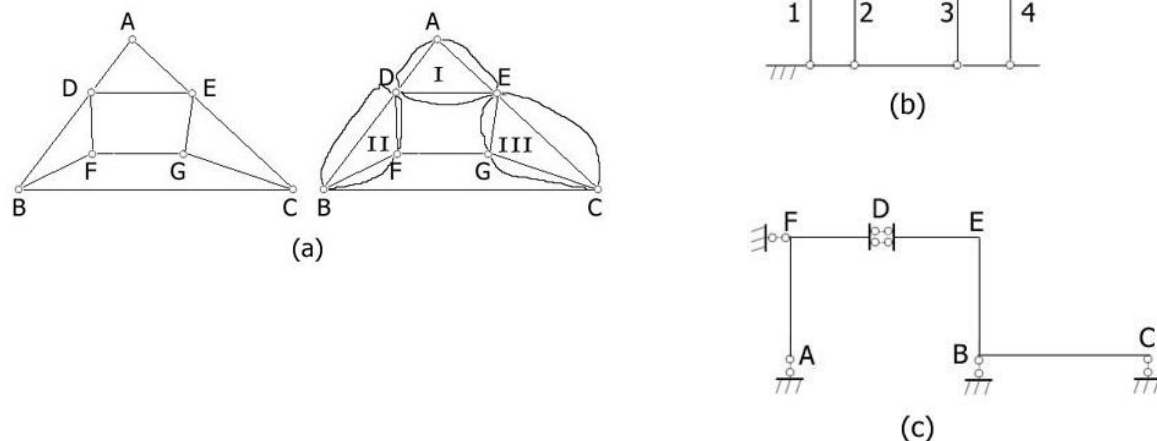


图 (a) 为无多余约束的几何不变体系；

图 (b) 为几何瞬变体系；

图 (c) 为几何瞬变体系。

例 2.4 对下列图示体系作几何组成分析。



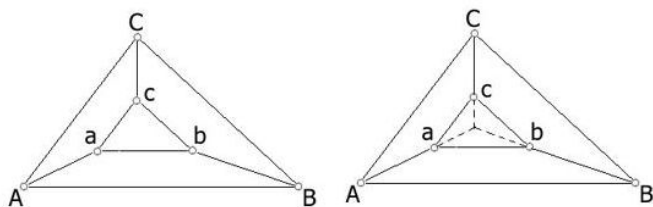
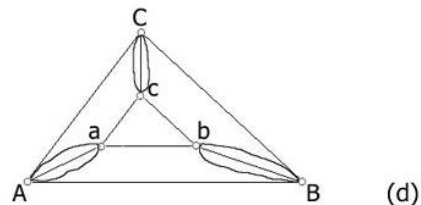


图 (a) 为几何瞬变体系；

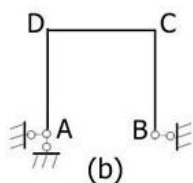
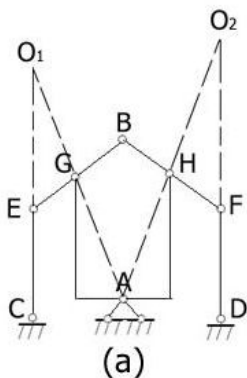
图 (b) 为几何瞬变体系；

图 (c) 为无多余约束的几何不变体系；

图 (d) 为几何瞬变体系。



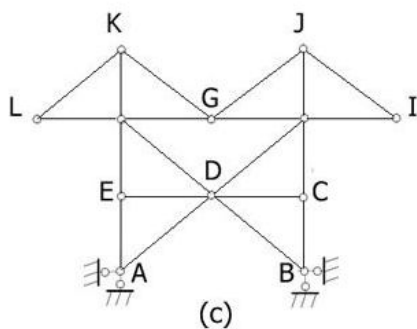
例 2.4 对图示各体系作几何组成分析。



图(a)为几何可变体系(少两个约束)；

图 (b) 为几何瞬变体系；

图 (c) 为几何瞬变体系。



第二章 小 结

一、本章要求

1. 了解几何不变、几何可变、瞬变体系、刚片、自由度、虚铰、约束及多余约束的概念；
2. 重点理解并掌握平面几何不变体系的简单组成规则，并能灵活应用到对体系的分析中。

1. 组成规则中的**四个要素**：刚片个数、约束个数、约束方式、结论。

2. 几何组成分析的要点是：**紧扣规则**。即把体系简化或分步取为两个或三个刚片，由相应的规则进行分析；分析过程中，规则中的四个要素均要明确表达，缺一不可。

三、对体系作几何组成分析的一般途径

1. 恰当灵活地确定体系中的刚片和约束

体系中的单个杆件、折杆、曲杆或已确定的几何不变体系均可视为刚片。但若刚片只用两个铰与体系的其它部分连接时，则可用一根过两铰心的链杆代替，视其为一根**链杆**的作用。

2. 如果上部体系与大地的连接符合两刚片的规则，则可去掉与大地的约束，只分析上部体系。

3. 通过依次从外部拆除二元体或从内部（基础、基本三角形）加二元体的方法，简化体系后再作分析。

4. 杆件和约束不能重复利用。

第三章 静定结构的内力计算

§ 3-1 单跨静定梁

一、静定结构概述

1. 概念：是没有多余约束的几何不变体系。
2. 特点：在任意荷载作用下，所有约束反力和内力都可由静力平衡方程唯一确定。

平衡方程数目 = 未知量数目

3. 常见的静定结构及应用

二、单跨静定梁的内力计算

1. 类型：简支梁、外伸梁、悬臂梁
2. 工程实例：钢筋混凝土过梁、吊车梁、单块预制板等
3. 支座反力的计算：由静力平衡方程唯一确定
4. 内力计算：截面法

(1) 截面内力形式及正负号的规定

截开一根梁式杆件的截面上有三个内力（分量），即：轴力 F_N 、剪力 F_S 和弯矩 M 。

F_N ：截面上平行杆轴的正应力的代数和，一般以受拉为正。

F_S ：截面上垂直于杆轴的切应力的代数和，以使隔离体产生顺时针转动为正。

M ：截面上正应力对截面中性轴的力矩代数和，对梁一般规定使其下部受拉为正。

(2) 截面法计算梁指定截面内力的步骤

- 1) 计算梁的支座反力（悬臂梁可不求）。
- 2) 在需要计算内力的横截面处，将梁假想切开，并任选一段为研究对象。
- 3) 画所选梁段的受力图，这时剪力与弯矩的方向均按正方向假设标出。
- 4) 通常由平衡方程 $\sum F_y = 0$ ，计算剪力 F_S 。
- 5) 以所切横截面的形心 C 为矩心，由平衡方程 $\sum m_C = 0$ ，计算弯矩 M 。

注意：计算内力要点

- (1) 所取的隔离体周围的所有约束必须全部切断并代以约束力、内力。
- (2) 对未知支座反力可先假定其方向，由计算结果的正负判断实际方向，并要求在计算结果后的圆括号内用箭头表示实际方向。
- (3) 计算截面的内力时，任意选取受力简单的隔离体研究，内力均按规定的正方向假设。

三、单跨静定梁内力图的绘制

1. 基本方法：按内力函数作内力图，即内力方程法。
2. 简单方法：由荷载与内力的微分关系作内力图，即分区段由内力图的特点绘制内力图。

(1) 在无荷载区段， F_S 图为水平直线；当 $F_S \neq 0$ 时， M 图为斜直线；当 $F_S = 0$ 时， M 图为水平直线。

(2) 在均布荷载区段, F_S 图为斜直线; M 图为抛物线, 且凸向与荷载指向相同。

(3) 水平集中力 F_x 作用点两侧截面 F_N 图有突变, 其突变值等于 F_x , F_S 图和 M 图不受影响。

(4) 竖向集中力 F_y 作用点两侧截面 F_S 图有突变, 其突变值等于 F_y ; M 图有折点, 其折点的尖角与 F_y 方向相同; F_N 图不受影响。

(5) 集中力偶 M 作用点两侧截面的 M 图有突变, 其突变值等于 M ; F_N 图和 F_S 图不受影响。

例 3.1 绘制图 3.1 所示梁内力图。

解: (1) 求支座反力

由梁整体的平衡方程 $\sum M_A = 0$, $6F_{By} - 15 \times 8 \times 4 = 0$

得 $F_{By} = 80 \text{ kN}$

由 $\sum F_y = 0$, 得 $F_{Ay} = 40 \text{ kN}$

(2) 确定控制截面的位置, 把梁分为若干区段

本例可确定 A 、 B 、 C 三点为控制截面, 把梁分为 AB 和 BC 两段。

(3) 计算各控制截面的 F_S 值和 M 值

支座 A 右侧截面: $M_A = 0$ $F_{SA} = 40 \text{ kN}$

支座 B 截面: $M_B = -30 \text{ kN} \cdot \text{m}$

B 截面剪力值左右有突变: $F_{SB左} = F_{SBA} = -50 \text{ kN}$

$F_{SB右} = F_{SBC} = 30 \text{ kN}$

自由端 C 左侧截面: $M_C = 0$, $F_{SC} = 0$

(4) 由内力图特点分区段绘制剪力、弯矩图

(5) 计算 $|M|_{\max}$

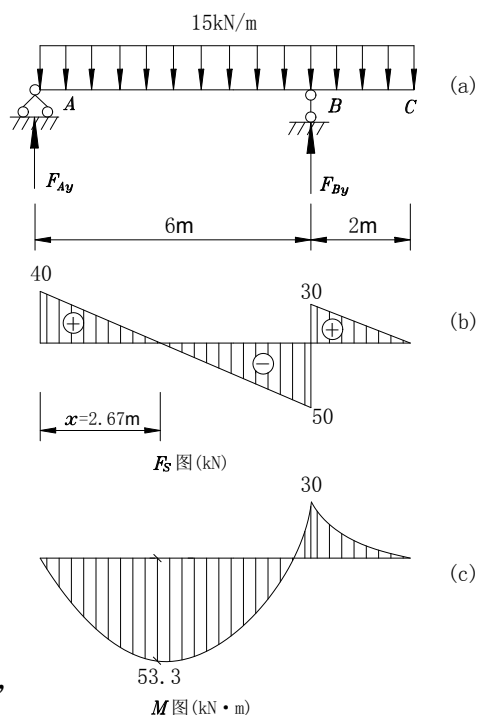
AB 段剪力为零的位置在 D 截面, 令 D 截面到支座 A 的距离为 x , 则由比例关系求得 $x = \frac{8}{3} \approx 2.67 \text{ m}$,

由极值定理得 D 截面为 AB 段弯矩存在极值的点, 即

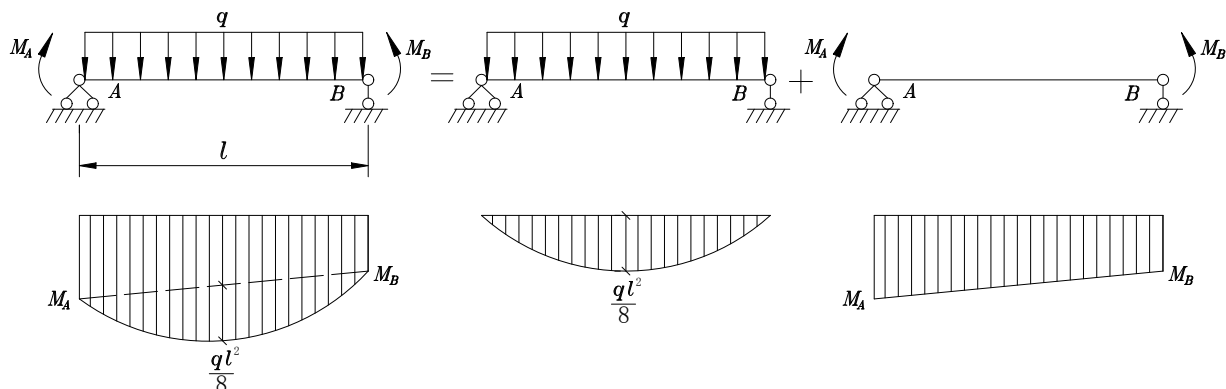
$$M_{\max} = M_D = 40 \times \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \times 15 \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 53.3 \text{ kN} \cdot \text{m} (\text{下侧受拉})$$

四、叠加法作弯矩图

1. 简支梁的弯矩图叠加法



叠加的基本原理：结构上全部荷载产生的内力等于每一荷载单独作用所产生的内力的代数和。



2. 弯矩图叠加的实质：指弯矩竖标的叠加（而不是图形的简单叠加），当同一截面在两个弯矩竖标在基线不同侧时，叠加后是两个竖标绝对值相减，弯矩竖标画在绝对值大的一侧；当两个竖标在基线同一侧时，则叠加后是两个竖标绝对值相加，竖标画在同侧。

3. 直杆段弯矩图的区段叠加法

直杆区段的弯矩图叠加可利用简支梁的弯矩图叠加法。其步骤是：

- （1）计算直杆段两端的最后弯矩值，以杆轴为基线画出弯矩值的竖标，并将两竖标连一虚线；
- （2）将所连直线作为新的基线，叠加相应简支梁在跨间荷载作用下的弯矩图。

例 3.2 绘制图 3.2 所示梁内力图。

解：（1）求支座反力

$$F_{By} = \frac{20 \times 2 + 10 \times 8 \times 4 - 30}{6} = 55 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 20 + 10 \times 8 - 55 = 45 \text{ kN}$$

（2）计算各控制截面的内力值以及各区段的弯矩叠加值

$$F_S \text{ 值: } F_{SA} = F_{Ay} = 45 \text{ kN} \quad F_{SC\text{左}} = 45 - 10 \times 2 = 25 \text{ kN} \quad F_{SC\text{右}} = 45 - 10 \times 2 - 20 = 5 \text{ kN}$$

$$F_{SB\text{左}} = 10 \times 2 - 55 = -35 \text{ kN} \quad F_{SB\text{右}} = 10 \times 2 = 20 \text{ kN} \quad F_{SD} = 0$$

$$M \text{ 值: } M_A = -30 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ (上侧受拉)}$$

$$M_C = 45 \times 2 - 30 - 10 \times 2 \times 1 = 40 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ (下侧受拉)}$$

$$M_B = -10 \times 2 \times 1 = -20 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ (上侧受拉)} \quad M_D = 0$$

$$AC \text{ 段中点的弯矩叠加值 } \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{8} \times 10 \times 2^2 = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$CB \text{ 段中点的弯矩叠加值 } \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{8} \times 10 \times 4^2 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$BD \text{ 段中点的弯矩叠加值 } \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{8} \times 10 \times 2^2 = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

（3）分段作内力图

F_S 图按各区段剪力图的特点绘制, 即首先由以上各控制截面的 F_S 值在相应各处作出 F_S

图的纵标, 然后在各区段两端纵标之间连线, 即得 F_S 图如图 (b)。

M 图需分三步作出。首先由以上算得的各控制截面 M 值作出各纵标, 然后在弯矩叠加的区段连虚线。最后, 以虚线为基线, 把以上算得的弯矩叠加值加上去, 连成实曲线, 得 M 图如图 (c) 所示。

应注意: 叠加是纵坐标值的相加, 因此叠加值必须垂直于横坐标轴线按竖直方向画出, 而不是垂直于虚线。

(4) 求 M_{\max}

当抛物线顶点的极值弯矩是全梁的最大正弯矩或最大负弯矩时, 应求出并标出。从 M 图可以看出, CB 区段上有全梁的最大正弯矩 M_{\max} , 求解如下。首先在该区段上找剪力为零的截面, 并令该截面到支座 A 的距离为 x , 则由

$$F_S(x) = 45 - 20 - 10x = 0 \quad \text{求得} \quad x = 2.5\text{m}$$

从而求出 $M_{\max} \quad M_{\max} = 45 \times 2.5 - 20 \times 0.5 - 10 \times 2.5 \times 1.25 = 41.25\text{kN} \cdot \text{m}$ (下侧受拉)

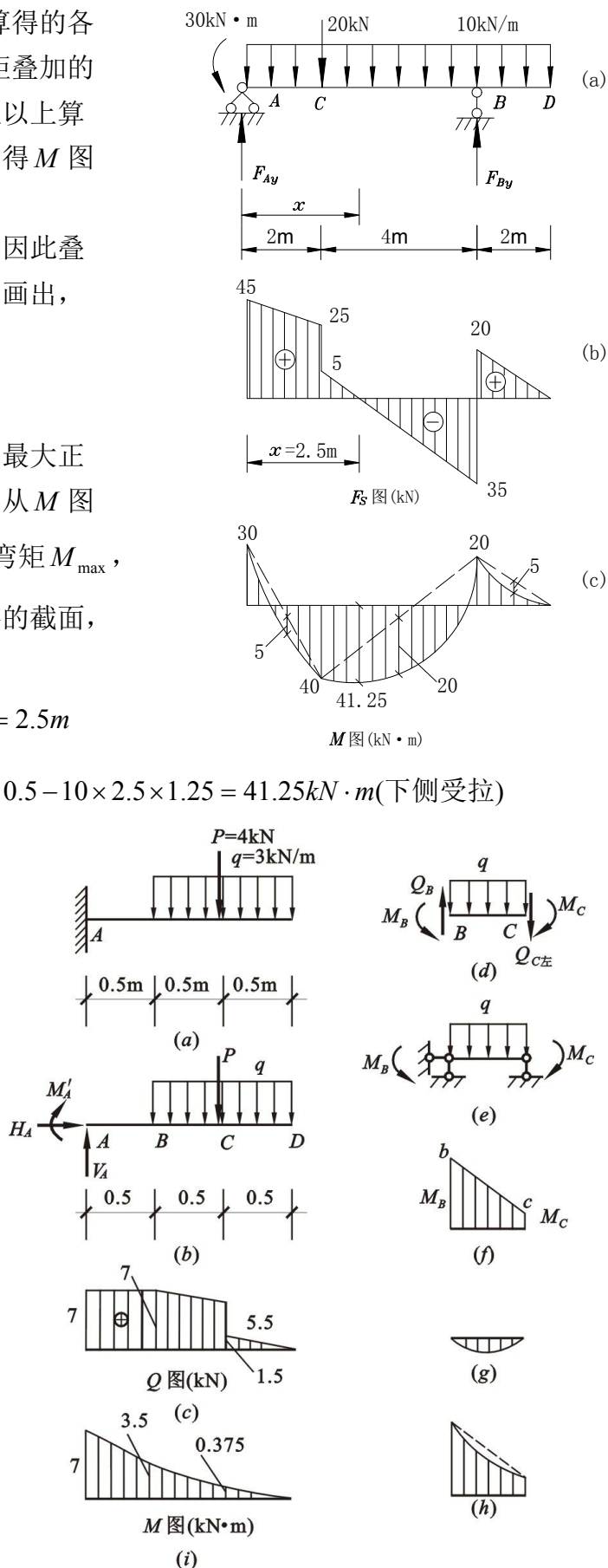
例 3.3 如图 3.3(a) 所示一悬臂梁, 承受均布荷载 $q=3\text{kN/m}$ 和集中荷载 $P=4\text{kN}$ 的作用, 试绘制其内力图。

解: (1) 求杆件轴力

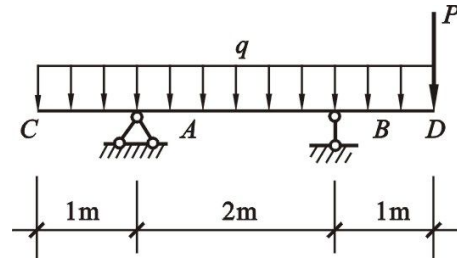
由于没有水平向的外荷载, 因此支座水平反力为零, 梁内轴力也为零。

(2) 求控制截面内力

(3) 分区段利用内力图特点及叠加原理绘制内力图。



例 3.4 如图 3.4 所示一外伸梁，承受集中荷载 $P=4\text{kN}$ ，均布荷载 $q=3\text{kN/m}$ ，试绘制其内力图。



五、简支斜梁

1. 工程实例：楼梯斜梁、刚架中的斜梁
2. 楼梯斜梁的荷载及转化

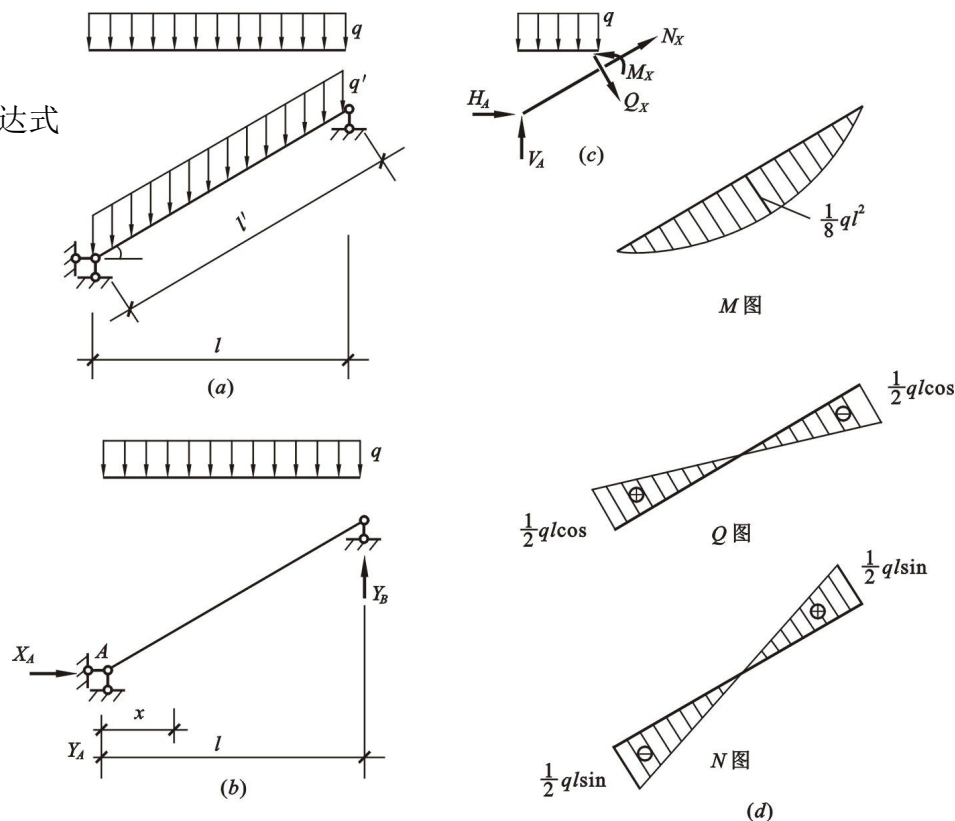
承受的荷载主要有两种，一种是沿斜梁水平投影长度分布的荷载，如楼梯上人群的重量等；另一种是沿倾斜的梁轴方向分布的竖向荷载，如梁的自重等。

一般在计算时，为计算简便可将沿梁轴方向分布的竖向荷载按等值转换为沿水平方向分布的竖向荷载，如图 3.5(a)所示，梁斜长为 l' ，水平投影长度为 l ，沿梁轴线方向分布的荷载为 q' ，转换为沿水平方向分布的荷载为 q ，则由于是等值转换，所以有：

$$q' l' = ql \quad q = q' l' / l = q' / \cos \alpha$$

3. 内力计算及内力图绘制

- (1) 求出支座反力
- (2) 求任一截面的内力表达式
- (3) 画内力图



由上图可知，弯矩图为抛物线形，跨中弯矩为 $\frac{1}{8}ql^2$ ，它与承受相同荷载的水平简支梁完全相同，Q 图与同样条件的水平简支梁的 Q 图形状相同，但数值是水平简支梁的 $\cos \alpha$ 倍。

§ 3-2 多跨静定梁

一、几何组成及传力特征

1. 定义：多跨静定梁是由若干个单跨梁用铰联结而成的静定结构。

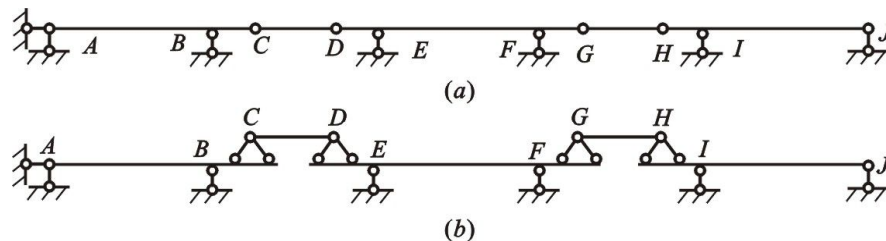
2. 应用：公路桥梁、房屋建筑中的木檩条

3. 几何组成：先基本，后附属

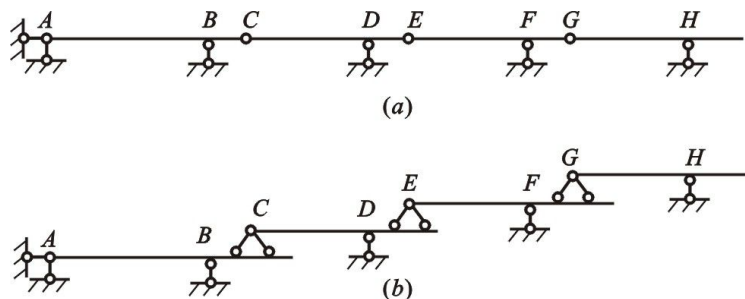
(1) 基本部分：结构中不依赖于其它部分而独立与大地形成几何不变的部分。

(2) 附属部分：结构中依赖基本部分的支承才能保持几何不变的部分。4. 传力特征：绘制传力层次图，附属部分→基本部分

(1) 第一种形式



(2) 第二种形式



二、内力计算

1. 受力特点

(1) 当多跨静定梁的附属部分上有外荷载时，该外荷载将使该附属部分产生内力，并传给它以下的基本部分使其也产生内力。

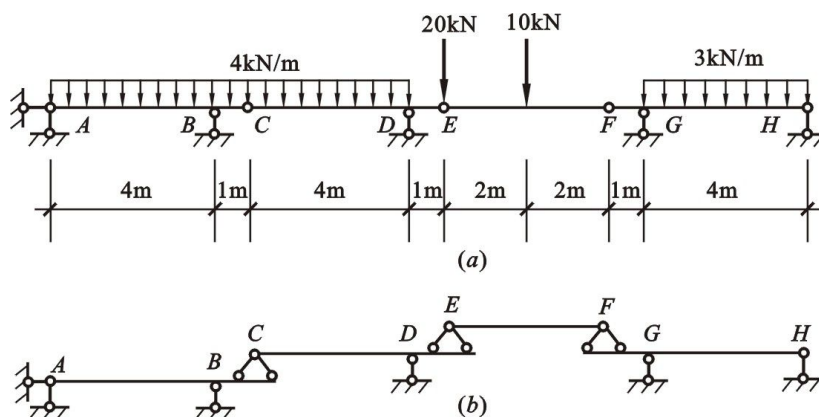
(2) 当在其基本部分上有外荷载时，该外荷载仅使该基本部分（及以下）产生内力，对其上的附属部分不产生内力。

2. 计算要点

(1) 计算顺序：先附属，后基本

(2) 多跨静定梁的内力总能由静力平衡条件求出。

例 3.5 计算图示多跨静定梁，并作内力图。



解：（1）根据传力途径绘制层次图，如图(b)所示。

（2）计算支座反力，先从高层次的附属部分开始，逐层向下计算。

①EF 段：由静力平衡条件得

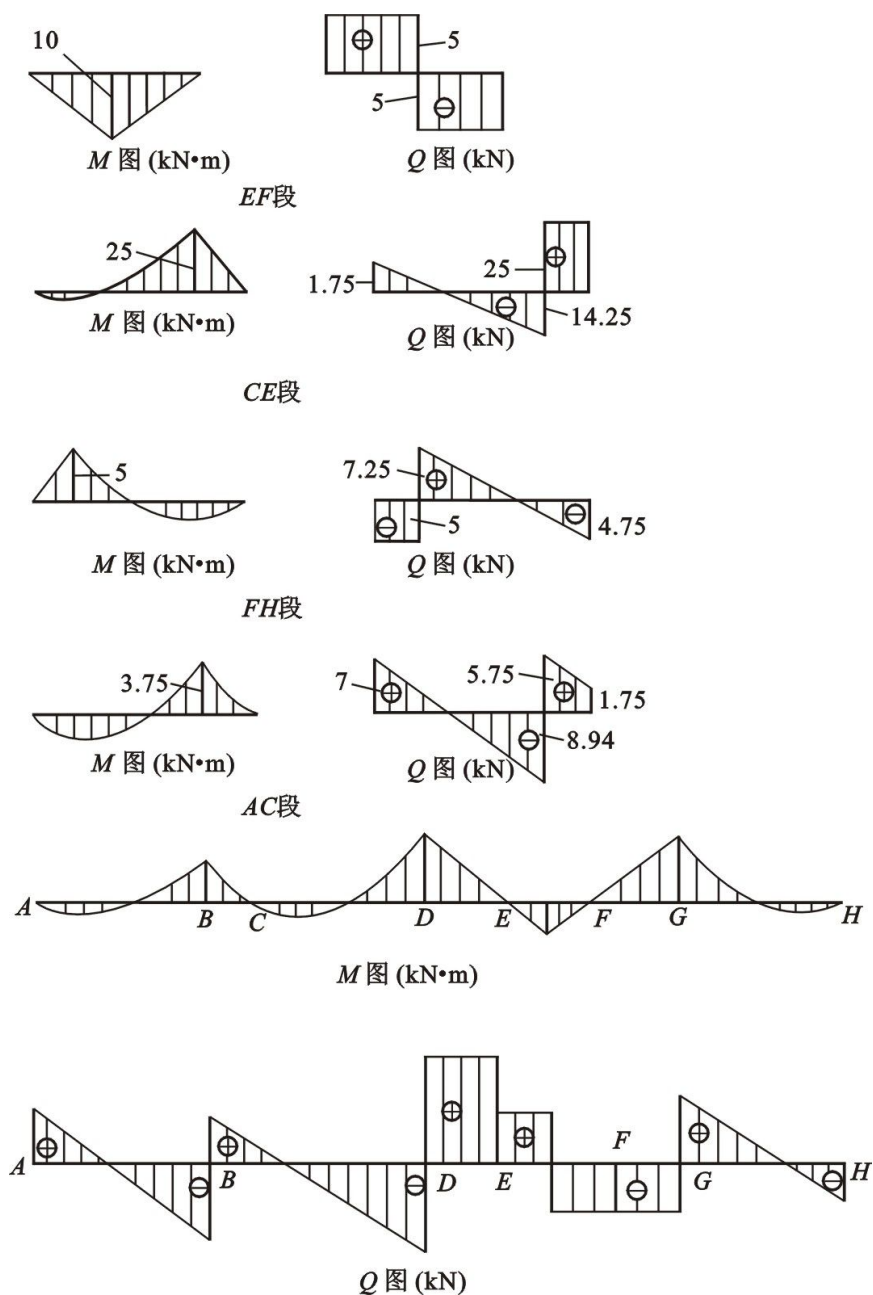
$$\sum M_E = 0 \quad F_{Fy} \times 4 - 10 \times 2 = 0 \Rightarrow F_{Fy} = 5\text{kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ey} + 5 - 10 - 20 = 0 \Rightarrow F_{Ey} = 25\text{kN}(\uparrow)$$

②CE 段：将 F_{Ey} 反向作用于 E 点，并与 q 共同作用可得

$$\sum M_C = 0 \quad F_{Dy} \times 4 - 25 \times 5 - 4 \times 4 \times 2 = 0 \Rightarrow F_{Dy} = 39.25\text{kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Cy} + 39.25 - 4 \times 4 - 25 = 0 \Rightarrow F_{Cy} = 1.75\text{kN}(\uparrow)$$



③FH 段：将 F_{Fy} 反向作用于 F 点，并与 $q=3\text{kN/m}$ 共同作用可得

$$\sum M_H = 0 \quad F_{Gy} \times 4 - 5 \times 5 - 3 \times 4 \times 2 = 0 \Rightarrow F_{Gy} = 12.25\text{kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Hy} + 12.25 - 5 - 3 \times 4 = 0 \Rightarrow F_{Hy} = 4.75\text{kN}(\uparrow)$$

④AC 段：将 F_{Cy} 反向作用于 C 点，并与 $q=4\text{kN/m}$ 共同作用可得

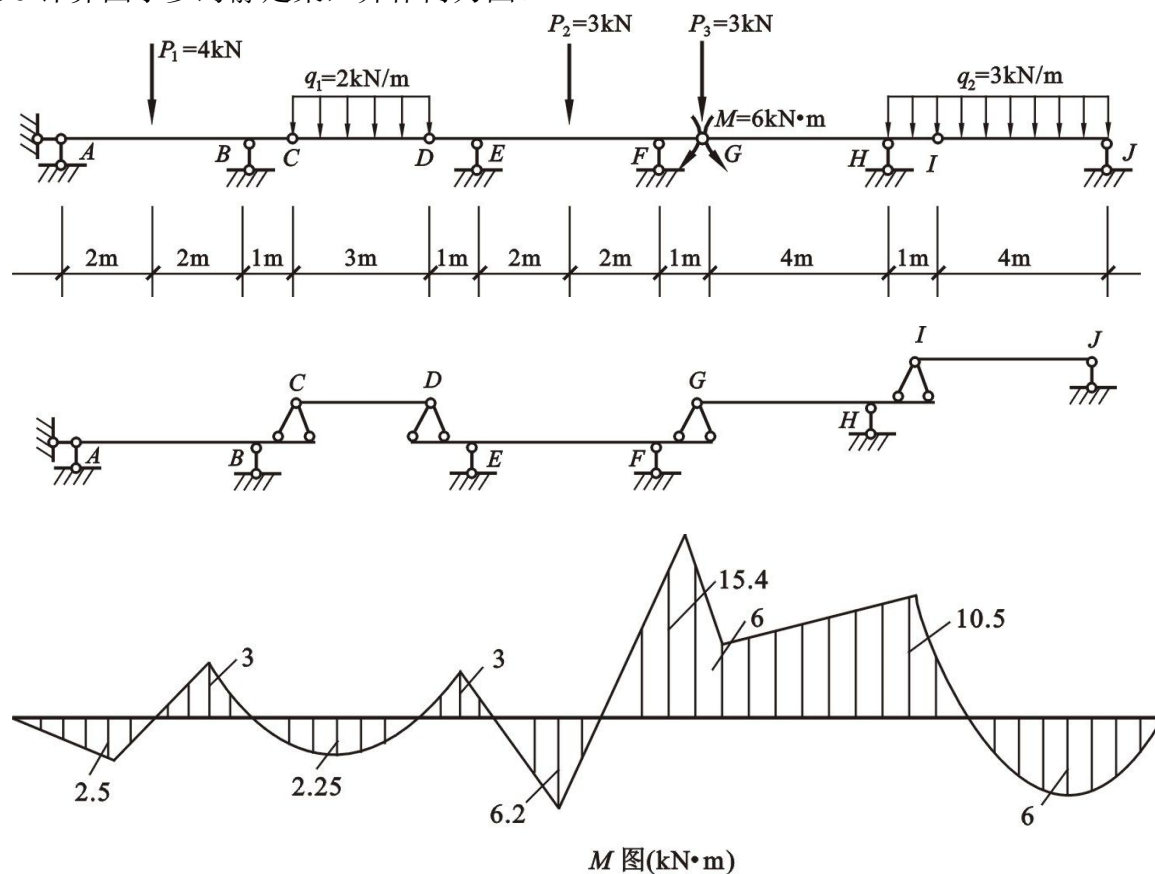
$$\sum M_A = 0 \quad F_{By} \times 4 - 1.75 \times 5 - 4 \times 5 \times 2.5 = 0 \Rightarrow F_{By} = 14.7\text{kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + 14.7 - 1.75 - 5 \times 4 = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 7.1\text{kN}(\uparrow)$$

(3) 计算内力并绘制内力图

各段支座反力求出后不难由静力平衡条件求出各截面内力，然后绘制各段内力图，最后将它们联成一体，得到多跨静定梁的 M 、 F_Q 图，如图所示。

例 3.5 计算图示多跨静定梁，并作内力图。



三、多跨静定梁的受力特征

1. 内力图特点：与同跨简支梁相比，弯矩图分布比较均匀，中间支座处有负弯矩，可减小跨中的正弯矩。
2. 受力特征：受力均匀，可节省材料，但其构造要复杂。

§ 3-3 静定平面刚架

一、概述

1. 定义:刚架一般指由若干横杆（梁或斜梁）、竖杆（柱）构成的，其主要特点是具有刚结点，可围成较大空间的结构形式。刚架的杆件是以弯曲变形为主的梁式杆。
2. 特点:在于它的**刚结点**。从几何组成看，刚结点能维持刚架的几何不变性，使结构内部具有较大的净空；从变形角度看，刚架整体刚度大，在荷载作用下，变形较小，刚结点在变形后既产生线位移，又产生角位移，但变形前后各杆端之间的夹角不变，即结点对各杆端的转动有约束作用，因此刚结点可以承受和传递弯矩；从内力角度看，由于刚结点能承受和传递弯矩，使杆件的内力分布更均匀，可以节省材料。

3. 分类:按支座形式和几何构造特点分为

(1) 简支刚架 (2) 悬臂刚架 (3) 三铰刚架 (4) 组合刚架

前三类是简单刚架；而组和刚架是复合刚架，简单刚架的分析是复合刚架分析的基础。

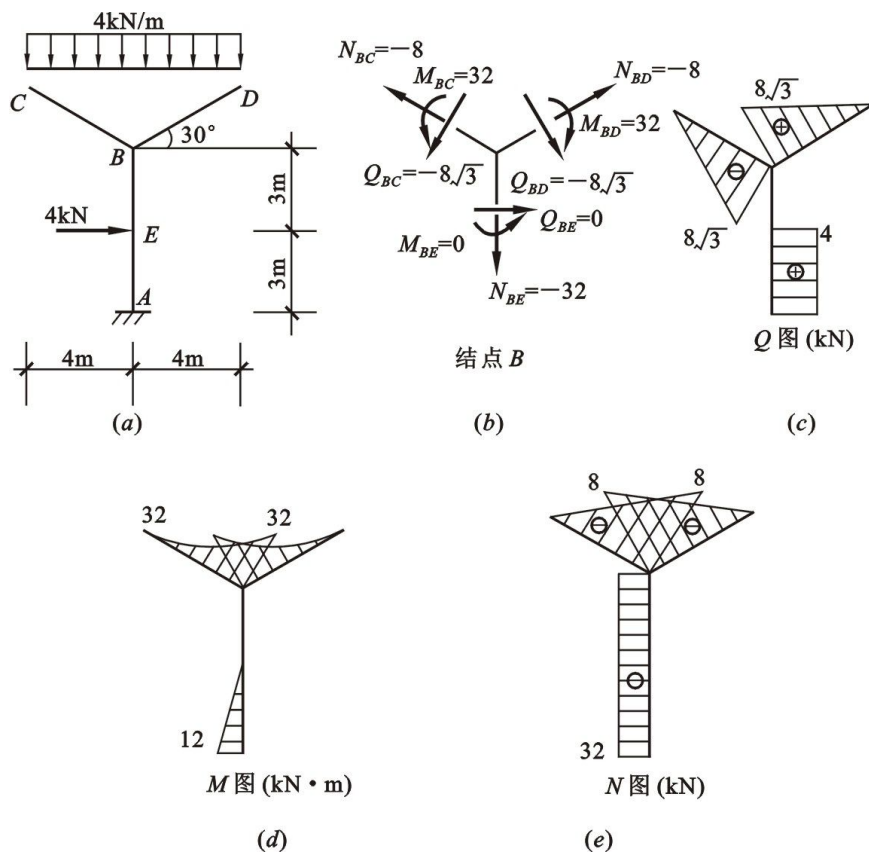
二、静定平面刚架的计算步骤

1. 计算支座反力（或约束力）；
2. 计算杆端截面内力（简称杆端力）和控制截面内力；
3. 分区段利用内力图的特点画各段内力图。

说明：（1）在刚架中，各杆件杆端是作为内力的控制截面的。杆端力，即杆端内力，用内力符号加两个下标表示杆端力。如用 M_{BA} 表示刚架中 AB 杆在 B 端的弯矩。

（2）刚架的内力正负号规定同梁。剪力、轴力图可画在杆轴的任一侧，但必须标正负号；弯矩图画在受拉侧，不标正负号。

例 1. 求悬臂刚架的内力图。



例 2. 求简支刚架的内力图。

解：(1) 求支座反力

(2) 求各控制截面内力

(3) 画内力图

(4) 校核

取 C 点为隔离体校核：

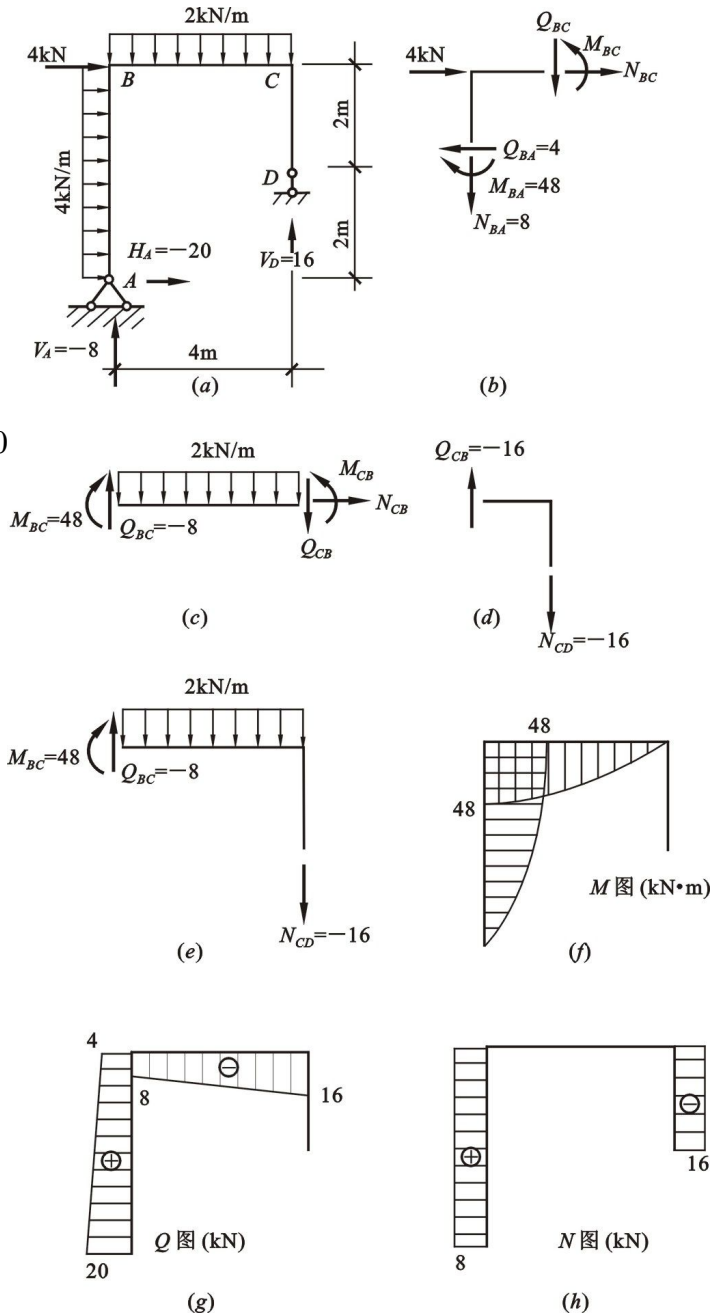
$$\sum F_y = F_{QCB} - F_{NCD} = -16 - (-16) = 0$$

取 BCD 为隔离体进行校核：

$$\sum F_y = F_{QBC} - 2 \times 4 - F_{NCD} = -8 - 8 - (-16) = 0$$

$$\sum M_B = M_{BC} + 2 \times 4 \times 2 + F_{NCD} \times 4 = 0$$

上述计算结果无误。



例 3. 求三铰刚架的内力图。(课本例 3.7)

例 4. 求组合刚架的内力图。

解：对于这种组合刚架，计算时应先计算附属部分的反力，再计算基本部分（或整体）的反力，然后按前述方法计算内力并绘制内力图。

本题中 ABCD 部分为基本部分，EFG 部分为附属部分。

(1) 求支座反力

先取 EFG 为隔离体，求 G 支座反力 $F_G = 4.5 \text{ kN} (\uparrow)$

E 结点处约束力 $F_{NEF} = -6 \text{ kN}$, $F_{QEF} = -4.5 \text{ kN}$ 。

取 ABCD 为隔离体（或取整体研究）， $F_D = 1 \text{ kN} (\uparrow)$ $F_{Ax} = 2 \text{ kN} (\rightarrow)$ $F_{Ay} = 10.5 \text{ kN} (\uparrow)$

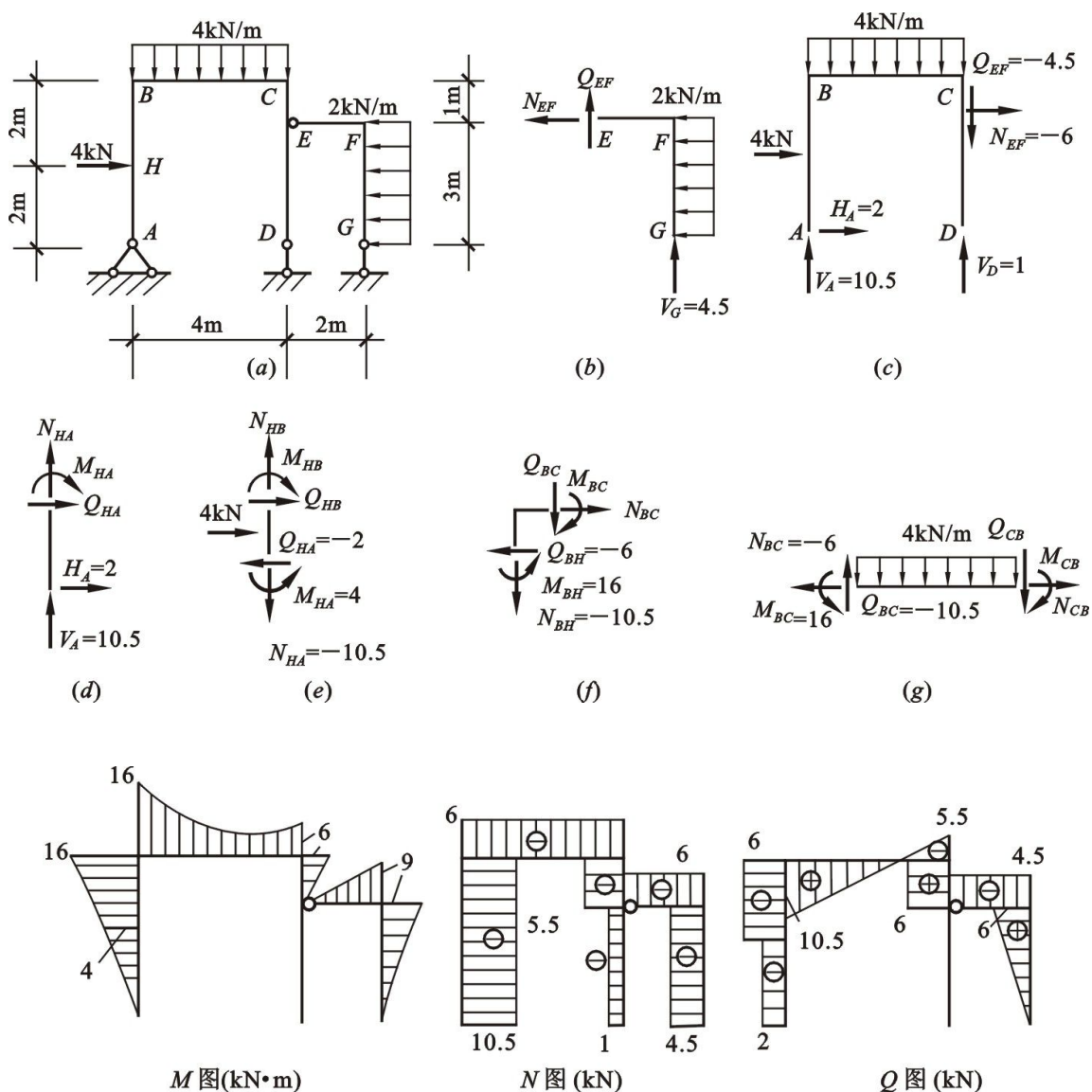
(2) 求内力

AH 杆，HB 杆，BC 杆，CD、EF、FG 杆

(3) 绘制内力图

(4) 校核

分别以结点 D、结点 G 和整个结构为隔离体进行校核，可见均满足平衡条件。



三、刚架内力图的另一作法

1. 先按上述作法绘制刚架的弯矩图。
2. 根据各杆端弯矩及杆件上的荷载，利用平衡条件求出各杆端剪力，并绘制剪力图。
剪力计算公式：

$$F_{Qij} = F_{Qij}^0 - \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l}$$

$$F_{Qji} = F_{Qji}^0 - \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l}$$

注：(1) F_{Qij}^0 、 F_{Qji}^0 是 ij 杆相应简支梁在杆上荷载作用下， i 端和 j 端的剪力；

(2) M_{ij} 、 M_{ji} 是 ij 杆 i 端和 j 端的弯矩，其符号根据正向规定确定。

3. 取刚结点为研究对象，由结点平衡求各杆端轴力，绘制轴力图。

§ 3.4 三铰拱

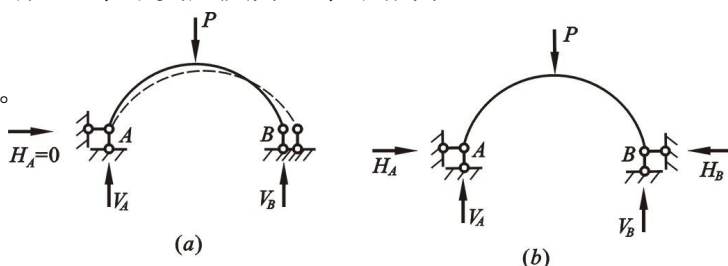
一、拱的概念

1. 定义: 杆轴为曲线, 在竖向荷载作用下可产生水平支座反力 (水平推力)。

与曲梁的区别: 在竖向荷载作用下

(1) 拱有水平反力 (推力), 曲梁没有。

(2) 水平推力的存在使拱的截面弯矩比相应简支梁的弯矩小的多, 可节省材料, 减轻自重。



2. 应用: 主要承受压力, 适用于大跨的桥梁和屋架。

3. 拱的构造及各部名称: 拱轴、拱趾、拱顶、拱跨、拱高、起拱线、高跨比 $\frac{f}{l}$ 是影响拱受力性能的主要参数。

4. 拱轴形状: 抛物线、圆弧线、悬链线等

5. 拱的分类: 三铰拱、两铰拱、无铰拱

静定拱: 三铰拱、带拉杆三铰拱; 超静定拱: 两铰拱、无铰拱。

二、三铰拱的内力计算

1. 三铰拱的支座反力: 和三铰刚架支座反力的计算方法完全相同。

2. 三铰拱与相应简支梁的几个关系式:

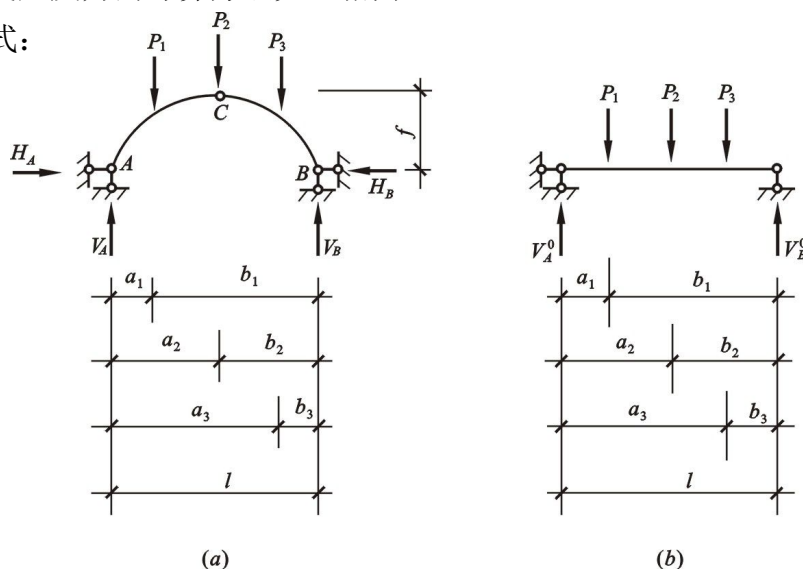
(1) 相应简支梁: 指与拱的跨度、荷载相同的简支梁。

(2) 几个关系式:

$$F_{Ay} = F_{Ay}^0 = \frac{\sum F_i b_i}{l}$$

$$F_{By} = F_{By}^0 = \frac{\sum F_i a_i}{l}$$

$$F_H = \frac{M_C^0}{f}$$



注: ①这三个关系式仅在只有竖向荷载作用下成立。

②竖向反力与拱高无关; 水平反力与拱轴形状无关, 而与三个铰的位置有关。

③由第三式分析, 在拱上作用的荷载和拱的跨度不变的条件下, M_C^0 是一个常数, 拱的

推力 F_H 与拱高成反比。即当高跨比 $\frac{f}{l}$ 越小, 则水平推力 F_H 越大。 ($f \rightarrow 0, F_H \rightarrow \infty$)

3. 拱的内力计算

(1) 内力形式: 拱的任一截面上一般有三个内力 (M 、 F_Q 、 F_N)

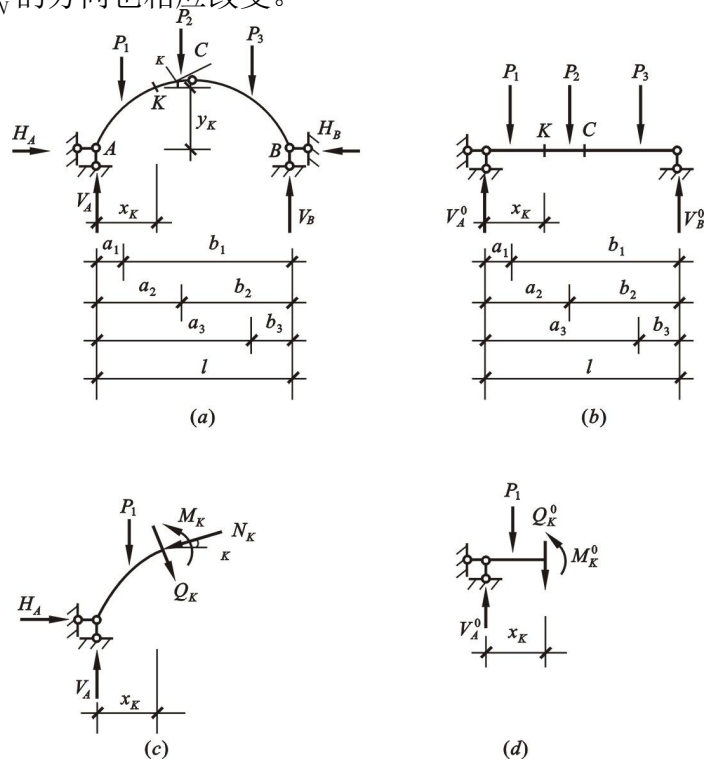
(2) 内力计算方法：截面法。与直杆件不同的是拱轴为曲线时，截面法线角度不断改变，截面上内力 F_Q 、 F_N 的方向也相应改变。

(3) 内力计算公式：

$$M_K = M_K^0 - F_H y_K$$

$$F_{NK} = F_{QK}^0 \sin \alpha_K + F_H \cos \alpha_K$$

$$F_{QK} = F_{QK}^0 \cos \alpha_K - F_H \sin \alpha_K$$



说明及注意：

- ①由于拱的水平推力的作用， $M_K < M_K^0$ ，有效减小弯矩。在竖向荷载作用下，梁中无轴力，而拱中有轴力，且数值较大一般为压力。所以拱是以受压为主的结构。
- ②以上公式是在以拱的左底铰为原点的平面直角坐标中应用，并仅考虑了竖向荷载的作用。
- ③式中 α_K 为所计算 K 截面处拱轴切线与水平 x 坐标的夹角。如果取 α_K 是与水平方向的锐角考虑，则 K 截面在左半拱时 α_K 为正，在右半拱时 α_K 为负。

- ④带拉杆的三铰拱，其支座反力可由整体的平衡条件完全求得，水平推力由拉杆承受。可将顶铰和拉杆切开，取任一部分求出拉杆中的轴力。

三、拱的内力图

1. 内力图特征：当拱轴为曲线时

- (1) 不管拱轴区段上是否有分布荷载，拱的各内力图在区段上均为曲线形状；
- (2) 在竖向集中力 F 作用点两侧截面，拱的轴力和剪力有突变，突变值分别为 $F \sin \alpha_K$ 和 $F \cos \alpha_K$ ，弯矩图在该点转折；在集中力偶 M 作用点两侧截面，弯矩有突变，突变值为 M ，轴力和剪力不受影响。

(3) 由于水平推力对拱的弯矩的影响，拱的弯矩与相应的简支梁的弯矩比较大大的减小。

2. 内力图的制作方法：原则上是将拱沿其跨度平分成若干等份区段，分别计算出每个等分点截面的内力值，然后将各点内力竖标顺序连以光滑曲线即可。但要注意各内力图上的突变和转折特征。

例 1 某三铰拱及其荷载如图(a)所示, 当坐标原点选在左支座时, 拱轴方程为 $y = \frac{4f(l-x)x}{l^2}$, 试作该三铰拱的内力图。

解: (1) 求支座反力

$$F_{Ay} = F_{Ay}^0 = \frac{\sum F_i b_i}{l} = \frac{50 \times 2 + 50 \times 7 + 20 \times 3 \times 4.5}{8} = 90 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$F_{By} = F_{By}^0 = 50 + 50 + 20 \times 3 - 90 = 70 \text{ kN}(\uparrow)$$

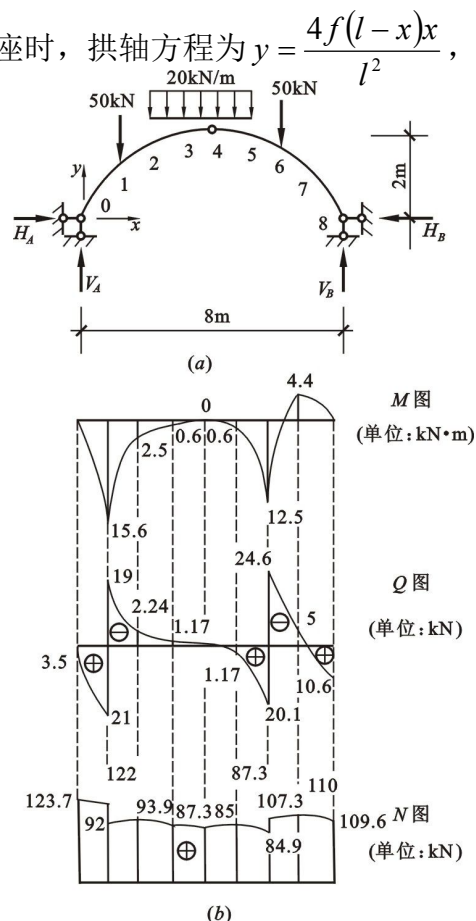
$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{90 \times 4 - 50 \times 3 - 20 \times 2 \times 1}{2} = 85 \text{ kN}(\rightarrow \leftarrow)$$

(2) 确定控制截面并计算控制截面的内力

将拱沿跨度分成 8 等份, 各等分点所对应的截面作为控制截面, 计算各截面内力如下表所示:

(3) 绘制内力图

根据表可以绘出内力图如图(b)所示。



拱轴分点	拱轴坐标 x_K (m)	拱轴纵坐标 y_K (m)	$\tan \varphi_K$	φ_K	$\sin \varphi_K$	$\cos \varphi_K$	Q_K^0 (kN)	M (kN·m)			Q (kN)			N (kN)		
								M_K^0	$-H_A y_K$	M_K	$Q_K^0 \cos \varphi_K$	$-H_A \sin \varphi_K$	Q_K	$Q_K^0 \sin \varphi_K$	$H_A \cos \varphi_K$	N_K
0	0	0	1	45°	0.707	0.707	90	0	0	0	63.63	-60.1	3.5	63.63	60.1	123.7
1 _左	1	0.875	0.75	36.87°	0.6	0.8	90	90	-74.4	15.6	72	-51	21	54	68	122
1 _右	1	0.875	0.75	36.87°	0.6	0.8	40	90	-74.4	15.6	32	-51	-19	24	68	92
2	2	1.5	0.5	26.57°	0.447	0.894	40	130	-127.5	2.5	35.76	-38	-2.24	17.88	76	93.9
3	3	1.875	0.25	14.04°	0.242	0.97	20	160	-159.4	0.6	19.4	-20.57	-1.17	4.84	82.45	87.3
4	4	2	0	0°	0	1	0	170	-170	0	0	0	0	0	85	85
5	5	1.875	-0.25	-14.04°	-0.242	+0.97	-20	160	-159.4	0.6	-19.4	20.57	1.17	4.84	82.45	87.3
6 _左	6	1.5	-0.5	-26.57°	-0.447	+0.894	-20	140	-127.5	12.5	-17.88	38	20.1	8.94	76	84.9
6 _右	6	1.5	-0.5	-26.57°	-0.447	+0.894	-70	140	-127.5	12.5	-62.58	38	-24.6	31.3	76	107.3
7	7	0.875	-0.75	-36.87°	-0.6	+0.8	-70	70	-74.4	-4.4	-56	51	-5	42	68	110
8	8	0	-1	-45°	-0.707	+0.707	-70	0	0	0	-49.49	60.1	10.6	49.49	60.1	109.6

四、拱的合理拱轴

- 概念: 在某一荷载作用下, 沿拱轴所有截面上均无弯矩只有轴向压力作用时的拱轴线。其压应力沿截面均匀分布, 此时的材料使用最为经济。
- 合理拱轴线的确定原则: 在荷载作用下, 任何截面的弯矩为零的原则确定。
- 竖向荷载下的合理拱轴线

竖向荷载下拱的弯矩计算公式为 $M_K = M_K^0 - F_H y_K$

$$\text{令 } M_K = 0 \quad \text{得 } y_K = \frac{M_K^0}{F_H}$$

三铰拱在竖向荷载作用的合理拱轴：

(1) 在竖向集中荷载作用下的无荷载区段上，合理拱轴是一条直线，并在集中荷载作用点出现转折。

(2) 在均布荷载作用区段上，合理拱轴是一条二次抛物线。

(3) 在径向均布荷载作用下，合理拱轴是圆弧线；在填土荷载作用下，合理拱轴是悬链线。

注：拱的合理拱轴线的形状与相应的简支梁的弯矩图相似。

例 2 求出如图(a)所示三铰拱承受竖向均布荷载时的合理拱轴。

解：作相应简支梁，其弯矩方程为：

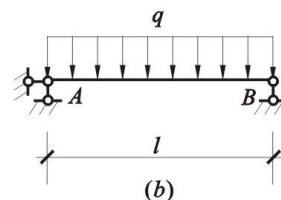
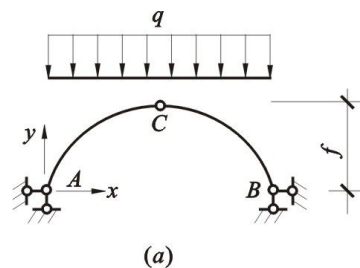
$$M_K^0 = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2$$

三铰拱支座水平推力为：

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

合理拱轴方程应为：

$$y_K = \frac{M_K^0}{F_H} = \frac{\frac{1}{2}qx(l-x)}{\frac{ql^2}{8f}} = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$$



由此可见，三铰拱在竖向均布荷载作用下的合理拱轴是一条二次抛物线。

§ 3-5 静定平面桁架

一、概述

1. 桁架的概念：桁架是由若干直杆组成且全为铰结点的结构计算简图形式。

2. 理想桁架假定

- (1) 桁架中的铰为绝对光滑而无摩擦的理想铰；
- (2) 桁架中的各杆件轴线绝对平直，且通过它两端铰中心；
- (3) 桁架上的荷载和支座反力都作用在结点上，而且位于桁架平面内；
- (4) 各杆自重不计，或平均分配在杆件两端的节点上。

注：理想桁架杆件只产生轴向内力，即理想桁架杆件是二力杆件。

3. 优缺点：与梁、刚架相比，截面应力分布均匀，材料的使用经济合理，自重较轻；但杆件较多，结点多，施工复杂。

4. 应用：工业和民用建筑中的屋架、托架、檩条、桥梁、高压线塔架、水闸闸门构架及其它大跨结构。

5. 工程中的实际桁架

(1) 工程中实际桁架从构造上与理想桁架的假定均相差很大。例如，轴线绝对平直的杆件和理想铰接实际中均做不到，尤其是后者。

(2) 理想桁架主要承受结点荷载，因此杆件的弯矩较小，主要以承受轴力为主。由于这类杆件的长细比较大，受压时会失稳。利用理想桁架计算简图计算杆件轴力（主内力）。杆件上的

弯矩、剪力（次内力）另由其他方法计算。

6. 桁架的组成和分类

(1) 桁架的组成：弦杆(上弦杆、下弦杆)；腹杆(竖杆、斜杆)

(2) 桁架的分类

按照外形分类：平行弦桁架、折线形桁架、三角形桁架、梯形桁架、抛物线形桁架

按照竖向荷载引起的支座反力的特点分类：**梁式桁架**，只产生竖向支座反力（简支支座）；**拱式桁架**，除产生竖向支座反力外还产生水平推力（铰支座）。

按其几何组成特点分：①简单桁架：由一个基本三角形依次加二元体组成。

②联合桁架：由若干简单桁架依次按两刚片或（和）三刚片规则组成。

③复杂桁架：除上述两类桁架以外的桁架。

二、静定平面桁架的内力计算

(一) 结点法——计算桁架内力的基本方法

1. 适用情况：一般用于简单桁架

2. 求解原理及方法：

先求支座反力，按照与几何组成相反的顺序依次截取结点为隔离体，由结点的平衡条件按平面汇交力系的平衡方程计算桁架内力。

说明：

(1) 单个结点只能建立两个独立的平衡方程，故一个结点只能截断两根待求杆件。

(2) 当一个结点截断 3 根待求杆件，其中两根共线时，则第三根杆件轴力求可求。

(3) 轴力以使杆件受拉为正，受压为负，待求杆件的轴力按受拉假设。

(4) 选择最合理的投影轴。

例 1 用结点法计算如图示桁架中各杆的内力。

解：(1) 计算支座反力

$$F_{Ay} = F_{By} = \frac{40 \times 3 + 20 \times 2}{2} = 80 \text{ kN}(\uparrow)$$

(2) 计算各杆内力

先从 A 结点开始计算：如图(b)所示

$$\sum F_y = 0 \quad F_{N4y} + 80 - 20 = 0$$

$$F_{N4y} = -60 \text{ kN}$$

$$F_{N41} = -60 \times \sqrt{5} = -134.16 \text{ kN}(\text{压力})$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N44x} + F_{N41} = 0$$

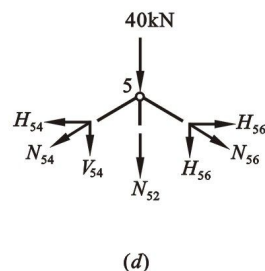
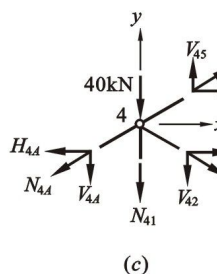
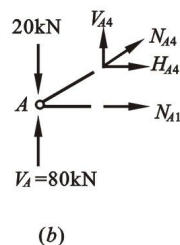
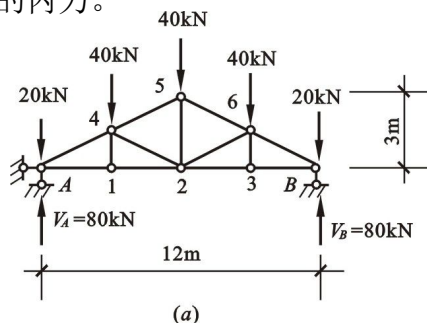
$$F_{N41} = 120 \text{ kN}(\text{拉力})$$

以 1 结点为隔离体，可以断定 14 杆为零杆，A1 杆与 12 杆内力相等，性质相同，即：

$$F_{N12} = F_{N41} = 120 \text{ kN}(\text{拉力})$$

以 4 结点为隔离体，如图(c)所示

$$\sum F_y = 0 \quad -F_{N44y} - F_{N42y} + F_{N45y} - 40 = 0$$



$$\sum F_x = 0 \quad -F_{N4Ax} + F_{N42x} + F_{N45x} = 0$$

$$\text{联立求解} \quad F_{N42} = -44.7\text{kN} \quad F_{N45} = -89.5\text{kN}$$

以结点 5 为隔离体, 如图 (d) 所示, 由于对称性, 所以 $F_{N56} = F_{N54} = -89.5\text{kN}$

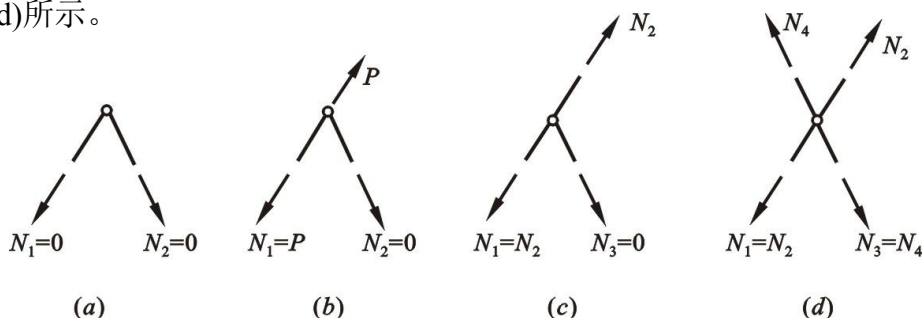
$$\sum F_y = 0 \quad -F_{N54y} - F_{N56y} - F_{N52} - 40 = 0 \quad F_{N52} = 40\text{kN}$$

注明: 在简单桁架的计算中, 按照拆二元体 (由最外层开始) 的顺序依次截取结点为隔离体, 则每个结点只有两个待求轴力杆件。所以, 简单桁架的内力可全部用结点法计算。

3. 零杆的判断:

轴力为零的杆件被称为零杆。在计算之前先断定出哪些杆件为零杆, 哪些杆件内力相等, 可以使后续的计算大大简化。在判别时, 可以依照下列规律进行。

- (1) 对于两杆结点, 当结点上无荷载时, 则两杆均为零杆, 如图(a)所示;
- (2) 对于两杆结点, 当外力沿其中一杆的方向作用时, 该杆内力与外力相等, 另一杆为零杆, 如图 (b) 所示。
- (3) 对于三杆结点, 若其中两杆共线, 当无外力作用时, 则第三杆为零杆, 其余两杆内力相等, 且内力性质相同 (均为拉力或压力)。如图(c)所示。
- (4) 对于四杆结点, 当杆件两两共线, 且无外力作用时, 则共线的各杆内力相等, 且性质相同。如图(d)所示。



(二) 截面法——计算桁架内力的基本方法

1. 适用情况: 一般用于简单桁架或联合桁架中的某些指定杆轴力的计算

2. 求解原理及方法:

先求支座反力, 用假想的截面截取桁架的某一部分 (至少包括两个结点) 为隔离体, 利用平面一般力系的平衡方程计算所截断杆件的轴力。

说明:

- (1) 平面一般力系只能建立三个独立的平衡方程, 故截面法切断的待求轴力杆件最多是三根。
- (2) 当截面只截断 3 根待求杆件, 且此三杆既不交于一点也不相互平行, 则可利用其中一杆对另外两杆的交点求矩的方法求该杆轴力。
- (3) 当截面截断杆件 > 3 根, 除一杆外其余三杆交于一点或相互平行, 则该杆轴力求可求。
- (4) 截面的形状是任意的, 可以是平面、曲面、闭合截面等。

例 2 如图(a)所示的平行弦桁架, 试求 a、b 杆的内力。

解: (1) 求支座反力

$$F_{Ay} = F_{By} = \frac{10 \times 5 + 5 \times 2}{2} = 30\text{kN}(\uparrow)$$

(2) 求 a 杆内力

作 I-I 截面将 12 杆、a 杆、45 杆截断, 如图(a)所示, 并取左半跨为隔离体, 如图(b)所示

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Na} + 30 - 10 - 5 = 0 \quad F_{Na} = -15\text{kN} \quad (\text{压力})$$

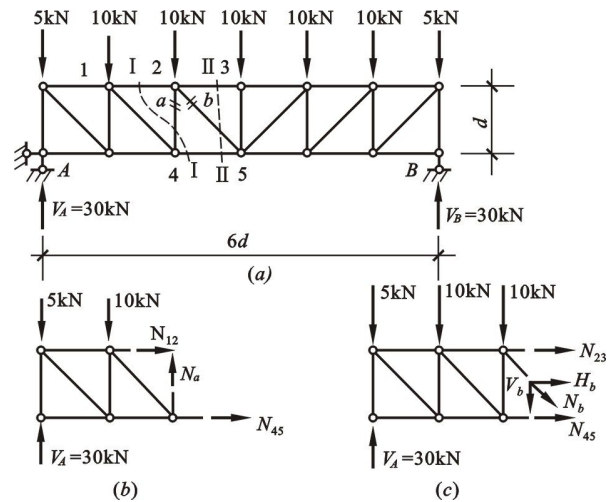
(3) 求 b 杆内力

作 II-II 截面将 23 杆、b 杆、45 杆截断，如图(a)所示，取左半跨为隔离体，如图(c)所示

$$\sum F_y = 0 \quad 30 - F_{N_{by}} - 10 \times 2 - 5 = 0$$

$$F_{N_{by}} = -5 \text{ kN (压力)}$$

$$F_{N_{by}} = -5\sqrt{2} = -7.07 \text{ kN (压力)}$$



例 3 求图(a)所示桁架中 CD 杆、HC 杆的内力。

解: (1) 求支座反力

$$F_{Ay} = F_{By} = 4P(\uparrow)$$

(2) 求 CD 杆的内力

作 I-I 截面，如图(a)所示，取左半跨为隔离体如图(b)所示，利用力矩方程计算：

$$\sum M_E = 0$$

$$F_{N_{CD}} \times h + Pa + 2Pa + 3Pa + \frac{1}{2}P \times 4a - 4P \times 4a = 0$$

$$F_{N_{CD}} = 8Pa/h$$

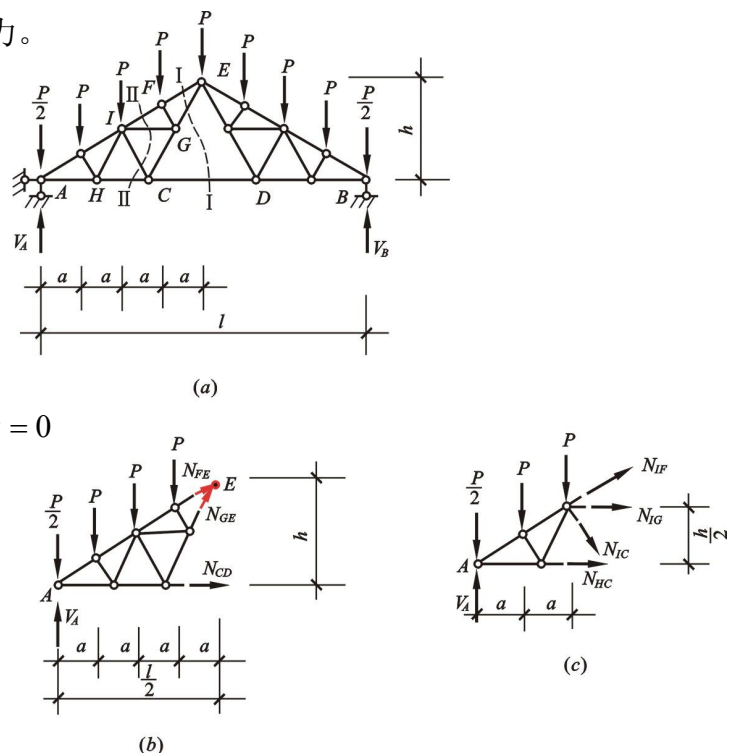
(3) 求 HC 杆的内力

作 II-II 截面，如图(a)所示，取左半跨为隔离体如图(c)所示，可见共有四个未知力，但除所求 HC 杆外，其余三杆同交于一点，因此可以利用力矩方程计算：

$$\sum M_I = 0$$

$$F_{N_{HC}} \times \frac{1}{2}h + Pa + \frac{1}{2}P \times 2a - 4P \times 2a = 0$$

$$F_{N_{HC}} = 12Pa/h$$



例 4 用截面法求图(a)所示中 a、b、c 三杆的内力。

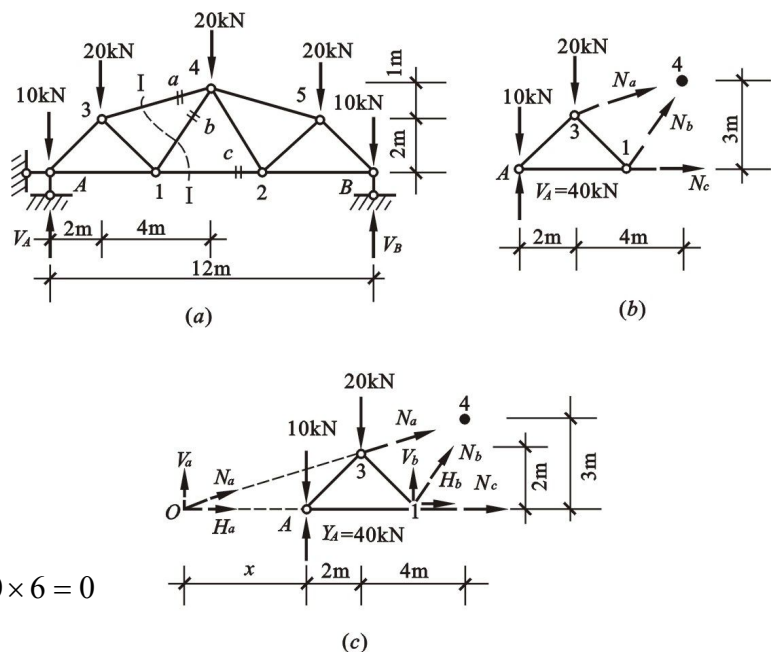
解: (1) 求支座反力

$$F_{Ay} = F_{By} = 40 \text{ kN}(\uparrow)$$

(2) 求内力

作截面 I-I 截断所求三杆，如图(a)所示，取左半部分为隔离体如图(b)所示

$$\sum M_4 = 0 \quad F_{N_c} \times 3 + 20 \times 4 + 10 \times 6 - 40 \times 6 = 0$$



$$F_{Nc} = 33.3\text{kN (拉力)}$$

取 a 杆与 c 杆的交点 O 为矩心, 如图(c)所示

根据相似三角形的比例关系有: $(x+2)/2=(x+6)/3$ 则 $x=6\text{m}$

$$\sum M_O = 0 \quad F_{Nby} \times 10 - 20 \times 8 - 10 \times 6 + 40 \times 6 = 0$$

$$F_{Nby} = -2\text{kN} \quad F_{Nby} = -2.4\text{kN (压力)}$$

将 F_{Na} 传到 O 点, 对 1 点求矩, 如图(c)所示:

$$\sum M_1 = 0 \quad F_{Nay} \times 10 - 20 \times 2 - 10 \times 4 + 40 \times 4 = 0$$

$$F_{Nay} = -8\text{kN} \quad F_{Na} = -33\text{kN (压力)}$$

(三) 结点法与截面法联合应用

适用情况: (1) 只求某几个杆的轴力时; (2) 联合桁架或复杂桁架的计算。

例 5 计算图(a)所示桁架中, a、b 杆的内力。

解: 先取 C 点为隔离体,

如图(b)所示, 根据

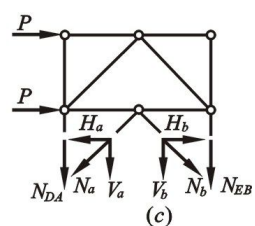
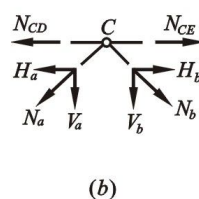
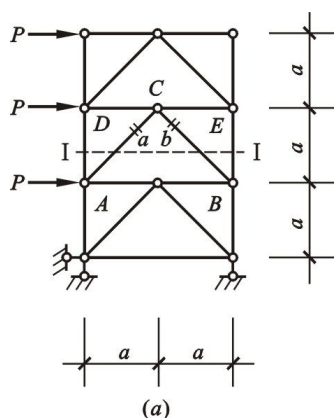
$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Nay} + F_{Nby} = 0$$

作 I - I 截面, 取上部为隔离体, 如图(c)

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{Nax} + F_{Nbx} + 2P = 0$$



由比例关系可知:

$$F_{Nay} = F_{Nax} \quad F_{Nby} = F_{Nbx}$$

可以解得:

$$F_{Na} = \sqrt{2}P \quad F_{Nb} = -\sqrt{2}P$$

三、几种桁架受力性能的比较

1. 平行弦桁架的内力分布不均匀, 弦杆轴力从两端向中间由小变大, 腹杆轴力从两端向中间递减。若各杆选用相同截面, 则浪费了材料, 若各杆截面不同, 则增加了结点拼接的困难。工程中常采用相同截面的弦杆制成的轻型桁架。
2. 三角形桁架内力分布也不均匀, 弦杆轴力从两端向中间由大变小, 腹杆轴力从两端向中间递增。上下弦杆间的夹角较小, 结点构造复杂, 但由于三角形桁架的外形符合一般瓦屋面的排水要求, 常做屋架使用。
3. 抛物线形桁架中各杆内力分布均匀、材料能被充分利用。弦杆转折较多, 结点构造复杂, 施工不便, 且两端上弦杆坡度大, 不利于防水材料的铺设, 在大跨度房屋中常被采用。
4. 梯形桁架中上下弦杆内力变化不大, 腹杆内力由两端向中间递减, 受力较均匀, 在施工制作上也比较方便。常用于中等跨度以上的钢结构厂房的屋盖中。

§ 3.6 组合结构

一、概述

1. 定义：有梁式杆又有二力杆构成的结构叫组合结构。

(1) 二力杆——只承受轴力

(2) 梁式杆——承受弯矩、剪力、轴力

2. 应用：屋架、吊车梁、桥梁等。

二、内力计算

1. 组合结构的计算要点：先求二力杆内力，后求梁式杆内力。

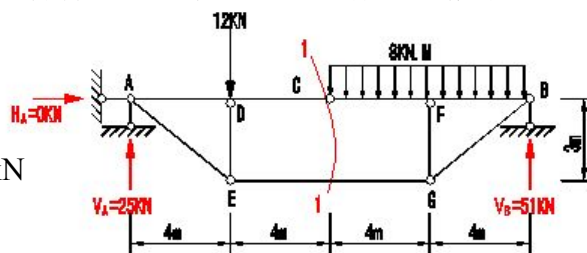
2. 正确区分二力杆和梁式杆，注意这两类不同特征的杆件汇交的铰结点不能作为与桁架结点法相同的使用。

例：试求图示组合结构，绘内力图。

解：(1) 求支座反力

$$\sum M_A = 0 \quad F_{By} \times 16 - 12 \times 4 - 8 \times 8 \times 12 = 0 \Rightarrow F_{By} = 51 \text{ kN}$$

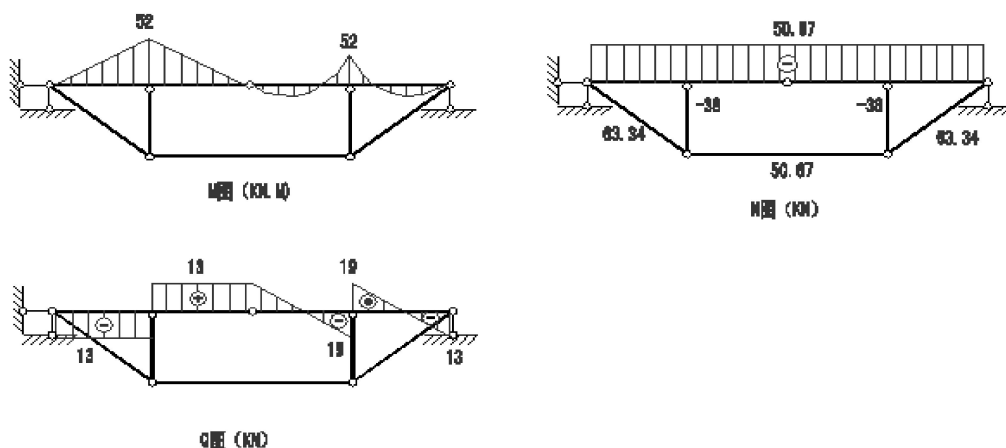
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} = 25 \text{ kN}(\uparrow)$$



(2) 内力计算：作 1-1 截面，研究其左半部， $\sum M_C = 0 \quad F_{NEG} = 50.67 \text{ kN}(\text{拉力})$

研究结点 E (G)： $F_{NED} = F_{NGF} = -38 \text{ kN}(\text{压力}) \quad F_{NEA} = F_{NGB} = 63.34 \text{ kN}(\text{拉力})$

(3) 根据计算结果，绘出内力图如下



§ 3.7 静定结构的特性

一、静定结构的基本特性

1. 几何组成特性：静定结构是无多余约束的几何不变体系。

2. 静力特性：静定结构的内力和反力由唯一静力平衡方程求解。唯一静定解的特性称为静定结构的静力特性。

二、静定结构的静力特性

1. 零内力（零反力）特性：当只受到温度变化、支座移动、制造误差及材料收缩等因素影响时，静定结构中不产生反力和内力，但有位移。

2. 局部平衡特性：当一平衡外力系作用在静定结构中某一局部几何不变部分上时，只在该局部几何不变部分上有内力，其它部分不受力。

3. 局部荷载等效变换特性：当在静定结构中的某一局部几何不变部分上作荷载的静力等效变换时，只有该局部几何不变部分的内力发生变化，其它部分的受力情况不变。

静力等效力系概念：当一个力系的合力与另一个力系的合力相同时，这两个力系互为静力等效力系。

第四章 静定结构的位移

§ 4-1 概述

一、位移概念

1. 定义：在外因（荷载、温度变化、支座沉降等）作用下，结构将发生尺寸和形状的改变，这种改变称为变形。结构变形后，其上各点的位置会有变动，这种位置的变动称为位移。某一截面相对于初始状态位置的变化叫作该截面的位移，包括截面移动和截面转动，即线位移和角位移。位移是矢量，有大小、方向。

2. 位移的种类

- (1) 线位移：水平位移；竖向位移
- (2) 角位移：转动方向

3. 广义位移概念：

- (1) 绝对位移：一个截面相对自身初始位置的位移，包括线位移和角位移。
- (2) 相对位移：一个截面相对另一个截面的位移，包括相对线位移和相对角位移。

二、计算结构位移的目的

1. 验算结构的刚度，使结构的位移或变形不超出规定的范围，满足结构的功能和使用要求。
2. 引入变形（位移）条件，为计算超静定结构提供基础。
3. 在结构的制作或施工时，按使用时结构位移的反方向预先采取措施。

三、产生结构位移的原因

1. 荷载作用
2. 温度变化和材料胀缩
3. 支座沉降和制作误差

四、计算结构位移的原理

1. 位移的假设条件：线弹性变形体在小变形条件下的位移
2. 计算原理：变形体系的虚功原理
3. 计算方法：虚设单位荷载法

§ 4-2 虚功原理

一、实功和虚功

1. 常力实功：实功与力和位移两个因素有关。
 - (1) 力所作的功等于物体上作用力 F 和沿力方向的相应位移 Δ 的乘积。
 - (2) 力偶所做的功等于力偶矩 M 与角位移 θ 的乘积。
2. 静力实功
 - (1) 静力概念：静力荷载加载到结构上是有一个过程的，荷载从零增加到最后值，结构的内力和位移也达到最后值；在整个加载过程中，外力和内力始终保持静力平衡。对于线弹性结构，在静力荷载加载的过程中，结构的位移和荷载成正比。
 - (2) 在静外力 F_1 作用下，变形体在力的作用点沿力的方向发生位移 Δ_{11} 。静力实功为

$$W = (1/2)F_1\Delta_{11}$$

3. 虚功

在简支梁上先加载 F_1 ，使力 F_1 作用点 1 的位移达到终值 Δ_{11} ，然后在作用点 2 加载 F_2 ，

使力 F_1 的作用点发生位移 Δ_{12} ，力 F_1 在位移 Δ_{12} 上作的功叫虚功，即：

$$W_{12} = F_1\Delta_{12}$$

虚功中的力和位移两个要素不相关，即无因果关系。虚功具有常力功的形式。



二、虚功原理及应用

1. 刚体体系的虚功原理：在具有理想约束的刚体体系中，若力状态中的力系满足静力平衡条件，则该力在相应的刚体位移上所作的外力虚功之和等于零，即 $W_{\text{外}} = 0$ 。
2. 变形体体系的虚功原理：对于任意微小的虚位移，外力所作虚功的总和等于各微段上的内力在变形上所作虚功的总和，即 $W_{\text{外}} = W_{\text{内}}$ 。
3. 应用：可虚设位移（或力）状态，求实际的力（或位移）。因此，虚功原理有两种应用。
 - (1) 虚设单位位移法：已知一个力状态，虚设一个单位位移状态，利用虚功方程求力状态中的未知力。这时，虚功原理也称为虚位移原理。
 - (2) 虚设单位荷载法：已知一个位移状态，虚设一个单位力状态，利用虚功方程求位移状态中的未知位移。这时，虚功原理也称为虚力原理。
4. 注意：
 - (1) 位移和变形是微小量，位移曲线光滑连续，并符合约束条件。
 - (2) 对于弹性、非弹性、线性、非线性变形体，虚功原理均适用。
 - (3) 在虚功原理中，做功的力和位移独立无关，可以虚设力也可虚设位移。

三、刚体体系虚功原理的应用举例

1. 采用**虚设单位荷载法**利用虚功方程求静定结构位移。
2. 采用**虚设单位位移法**利用虚功方程求静定结构反力。

§ 4-3 结构位移计算的一般公式

一、位移计算的基本原理：变形体体系的虚功原理

二、位移计算的计算方法：虚设单位荷载法

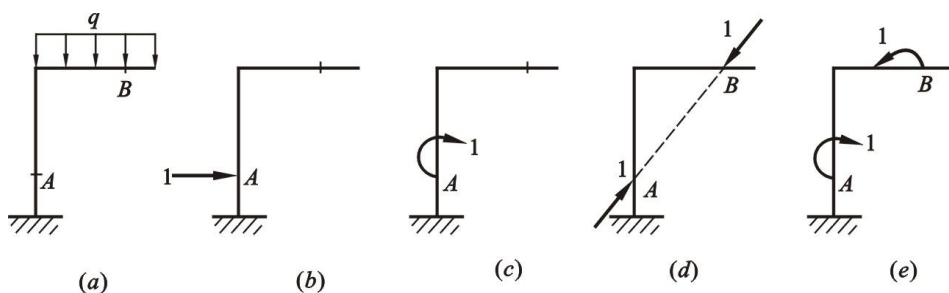
三、位移计算的一般公式

$$\Delta = \sum \int \overline{F_N} du + \sum \int \overline{M} d\varphi + \sum \int \overline{F_Q} d\eta - \sum \overline{R_i} C_i$$

四、虚设单位荷载的几种情况

1. 欲求 A 点的水平线位移时，应在 A 点沿水平方向加一单位集中力如图(b)所示；
2. 欲求 A 点的角位移，应在 A 点加一单位力偶如图(c)所示；
3. 欲求 A、B 的相对线位移，应在两点沿 AB 连线方向加一对反向的单位集中力如图(d)所示；
4. 欲求 A、B 两截面的相对角位移，应在 A、B 两截面处加一对反向的单位力偶如图(e)所示。

说明：在计算桁架某杆件的角位移或某两个杆件的相对角位移时，虚单位力偶是设在相应杆两端的且与杆轴垂直的一对大小相等方向相反得一对平行力，力的值为 $1/l$ (l 为杆长)。



§ 4-4 结构在荷载作用下的位移计算

一、结构在荷载作用下的位移计算公式

结构只受荷载作用，无支座位移，则公式可简化为：

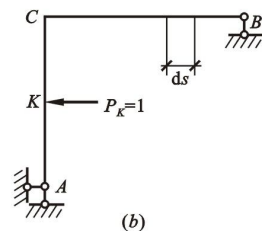
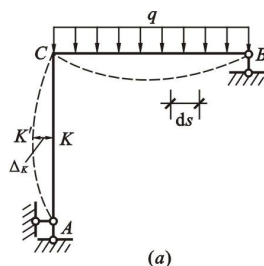
$$\Delta = \sum \int \overline{F_N} du + \sum \int \overline{M} d\varphi + \sum \int \overline{F_Q} \gamma ds$$

公式进一步推导，可得 $\Delta = \sum \int \frac{F_{NP} \overline{F_N}}{EA} ds + \sum \int \frac{M_P \overline{M}}{EI} ds + \sum \int \frac{k F_{QP} \overline{F_Q}}{GA} ds$

相对转角 $d\varphi = \frac{1}{\rho} ds = k ds$

相对剪切变形 $d\eta = \gamma ds$

相对轴向变形 $du = \varepsilon ds$

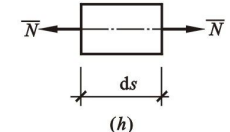
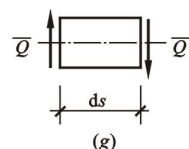
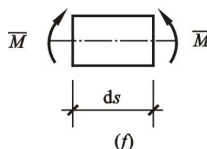
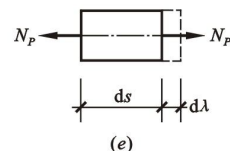
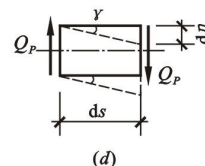
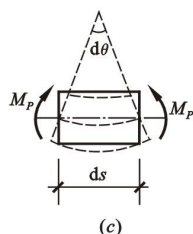


由材料力学公式，有

$$du = \varepsilon ds = \frac{F_{NP}}{EA} ds$$

$$d\varphi = \frac{1}{\rho} ds = \frac{M_P}{EI} ds$$

$$d\eta = \gamma ds = \frac{k F_{QP}}{GA} ds$$



其中：

(1) F_{NP} 、 M_P 、 F_{QP} ——实际荷载作用下引起的 ds 微段上的内力；

(2) $\overline{F_N}$ 、 \overline{M} 、 $\overline{F_S}$ ——虚设单位荷载作用下引起的 ds 微段上的内力；

(3) $M_P \overline{M}$ 的乘积——同侧受拉为正，异侧受拉为负。

对于不同的杆件结构类型公式可进一步简化：

1. 梁和刚架：以受弯为主，不考虑剪力和轴力的影响

$$\Delta = \sum \int \frac{M_P \overline{M}}{EI} ds$$

2. 桁架：杆件内力只有轴力

$$\Delta = \sum \int \frac{F_{NP} \overline{F_N}}{EA} ds = \sum \frac{F_{NP} \overline{F_N} L}{EA}$$

3. 组合结构：梁式杆只考虑弯矩，二力杆只有轴力

$$\Delta = \sum \int \frac{F_{NP} \overline{F_N}}{EA} ds + \sum \int \frac{M_P \overline{M}}{EI} ds$$

4. 拱：一般只考虑弯曲变形的影响，即

$$\Delta = \sum \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds$$

计算扁平拱 ($f/l < \frac{1}{5}$) 的水平位移时，要同时考虑弯曲变形和轴向变形的影响

$$\Delta = \sum \int \frac{F_{NP} \bar{F}_N}{EA} ds + \sum \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds$$

二、利用单位荷载法计算结构位移的步骤

1. 根据欲求位移虚设相应的单位荷载状态；
2. 列出结构各杆段在虚设单位荷载状态下和实际荷载作用下的内力方程；
3. 将各内力方程分别代入位移计算公式，分段积分求总和即可计算出所求位移。

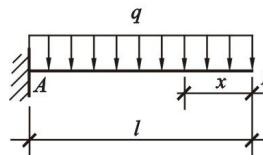
例 1. 求图示悬臂梁 B 端的竖向位移 Δ_{BV} 。EI 为常数。

解：(1) 取图 (b) 所示虚力状态。

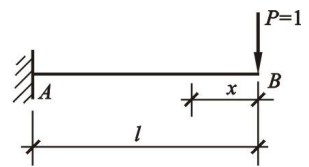
(2) 实际荷载与单位荷载所引起的弯矩分别为(以下侧受拉为正，B 为原点)

$$M_P = -\frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$\bar{M} = -x \quad (0 \leq x \leq l)$$



(a)



(b)

(3) 代入位移公式，得

$$\Delta_{BV} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds = \int_0^l \frac{qx^2 x}{2EI} dx = \frac{ql^4}{8EI} (\downarrow)$$

例 2. 试求图(a)所示简支梁在均布荷载 q 作用下：(1) B 支座处的转角；(2) 梁跨中 C 点的竖向线位移。EI 为常数。

解：(1) 求 B 截面的角位移。

在 B 截面处加一单位力偶 $m=1$ ，建立虚力状态如图(b)。实际荷载与单位荷载所引起的弯矩分别为(以 A 为原点)

$$M_P = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$\bar{M} = -\frac{1}{l}x \quad (0 \leq x \leq l)$$

将 M_P 、 \bar{M} 代入位移公式得

$$\varphi_B = \sum \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{q}{2} (lx - x^2) \left(-\frac{x}{l} \right) dx = -\frac{ql^3}{24EI}$$

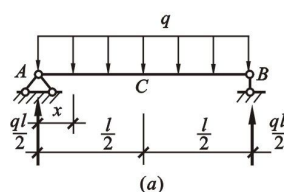
结果为负值，表示其方向与所加的单位力偶方向相反，即 B 截面逆时针转动。

(2) 求跨中 C 点的竖向线位移

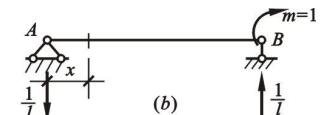
在 C 点加一单位力 $P=1$ ，建立虚力状态如图(c)所示。实际荷载与单位荷载所引起的弯矩分别为(以 A 为原点)，当 $0 \leq x \leq l/2$ 时，有

$$M_P = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \quad \bar{M} = \frac{1}{2}x \quad (0 \leq x \leq l/2)$$

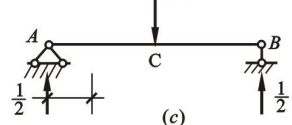
因为对称关系，因此得



(a)



(b)



(c)

$$\Delta_{CV} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \left(\frac{x}{2} \right) dx = \frac{5ql^4}{384EI} (\downarrow)$$

例 3. 求图(a)所示悬臂刚架 C 截面的角位移 φ_C 。刚架 EI 为常数。

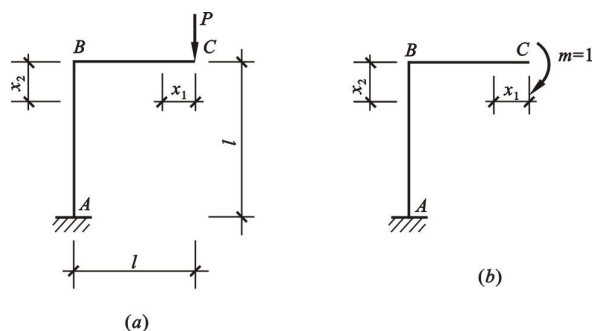
解: (1) 取图(b)所示虚力状态。

(2) 实际荷载与单位荷载所引起的弯矩分别为(以内侧受拉为正)
横梁 BC(以 C 为原点)

$$M_P = -Px_1 \quad \bar{M} = -1 \quad (0 \leq x_1 \leq l)$$

竖柱 BA(以 B 为原点)

$$M_P = -Pl \quad \bar{M} = -1 \quad (0 \leq x_2 \leq l)$$



(3) 将 M_P 、 \bar{M} 代入位移公式求 φ_C

$$\varphi_C = \sum \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^l (-Px_1)(-1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^l (-Pl)(-1) dx_2 = \frac{3Pl^2}{2EI}$$

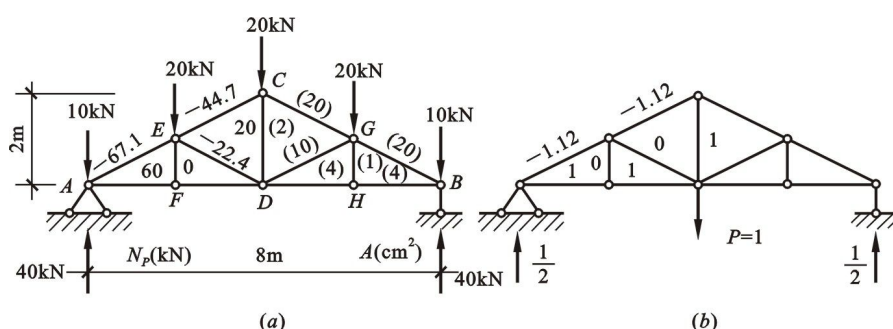
例 4. 计算图(a)所示屋架 D 点的竖向位移 Δ_{DV} 。图中右半部分括号内数值为杆件的截面面积 $A(\text{cm}^2)$ ，设 $E=2.1 \times 10^2 \text{kN/m}^2$ 。

解: (1) 取图(b)所示虚力状态。

(2) 实际荷载和单位荷载所引起的各杆内力分别如图(a)左半部和(b)左半部所示。

$$(3) \text{ 根据 } \Delta = \sum \int \frac{F_{NP} \bar{F}_N}{EA} L,$$

可把计算数据列成表。



计算半个屋架数值

杆 件		l (mm)	A (mm ²)	l/A (1/mm)	\bar{N}	N_P (kN)	$\bar{N}N_P l/A$ (kN/mm)
上 弦	AE	2240	2000	1.12	-1.12	-67.1	84.2
	EC	2240	2000	1.12	-1.12	-44.7	56.1
下 弦	AD	4000	400	10.0	1	60	600
斜 杆	ED	2240	1000	2.24	0	-22.4	0
竖 杆	EF	1000	100	10.0	0	0	0
	CD	2000	200	10.0	1	20	200
Σ							940.3

由此求得 D 点竖向位移 $\Delta_{DV} = (2 \times 940.3 - 200) / (2.1 \times 10^2) = 8.0 \text{mm} (\downarrow)$
结果为正，表示 D 点位移向下。

§ 4-5 图乘法

一、应用范围

1. 适用情况：以受弯曲变形为主的梁、刚架、组合结构中的梁式杆

2. 三个限定条件

(1) 各杆轴线均为直线

(2) 各杆段 EI 为常数

(3) M_p 和 \bar{M} 图中至少有一个是直线图形

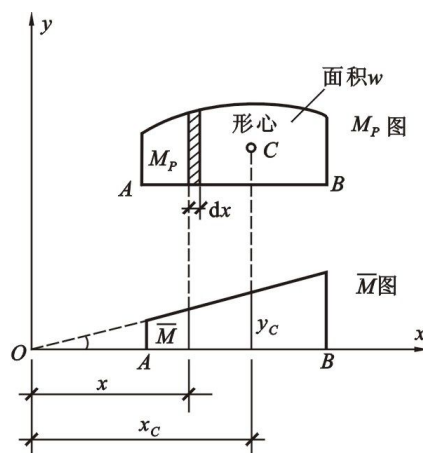
二、公式推导

1. 公式： $\Delta = \sum \frac{\omega y_c}{EI}$

$$\int_A^B \frac{\bar{M} M_p}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int x \tan \alpha \cdot M_p dx = \frac{\tan \alpha}{EI} \int x d\omega = \frac{\tan \alpha}{EI} S_y$$

$$S_y = \int x d\omega = \omega \cdot x_c$$

$$\text{即 } \Delta = \frac{\tan \alpha}{EI} \omega x_c = \frac{\omega y_c}{EI}$$



2. 说明：

(1) 图乘公式要符合上述三个限定条件

(2) 竖标 y_c ($y_c = x_c \tan \alpha$) 只能取自直线图形

(3) ω 和 y_c 取自两个不同的弯矩图中

(4) ωy_c 的乘积在两个弯矩图同侧受拉时为正，异侧为负

三、图乘法在使用时的几个具体问题

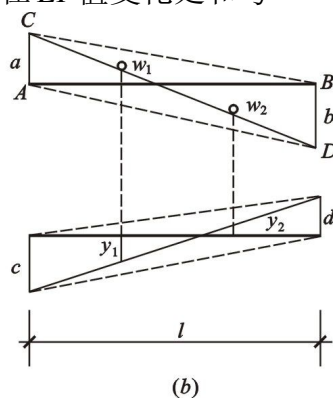
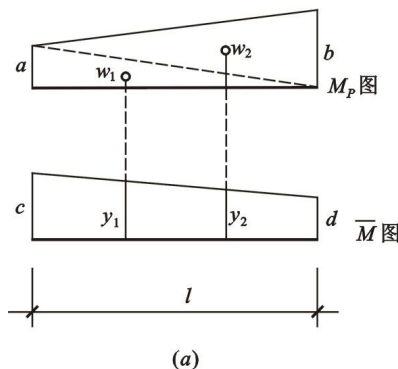
1. M_p 和 \bar{M} 图均为直线图形时，竖标 y_c 可取自任一直线图形，面积 ω 取自另一图形。

2. 当取竖标的弯矩图是折线图形或各杆段的 EI 不同时，应分段图乘，即在 EI 值变化处和弯矩图转折处要分段。

3. M_p 和 \bar{M} 图均为梯形时，可不求梯形形心，把梯形分成一个三角形和一个矩形或两个三角形分开图乘即可。

$$\text{其中 } y_1 = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d$$

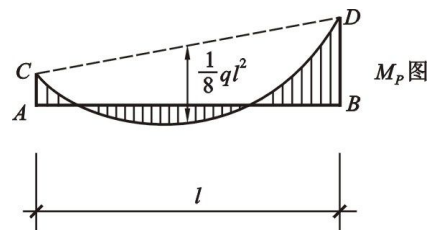
$$y_2 = \frac{2}{3}d + \frac{1}{3}c$$



4. M_p 和 \bar{M} 图均为直线图形，但杆件两端弯矩不在基线的同一侧时，也可按两个辅助三角形来处理。其中

$$y_1 = \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}d; \quad y_2 = \frac{2}{3}d - \frac{1}{3}c$$

5. 当 M_p 图是采用叠加的方法绘制时，图乘时要分解成简单图形后再进行图乘。



说明：

- (1) 熟练运用弯矩叠加法分解图形后再图乘是应用图乘法必须掌握的基本功。
- (2) 弯矩图的叠加或分解是竖标的叠加，而不是图形的简单叠加。
- (3) 注意标准抛物线图形的定义。

标准抛物线：指顶点在中点或端点的抛物线图形，而“顶点”是指其切线平行于基线的点，即在顶点处 $dM/dx = 0$ ，顶点处截面的剪力为零。

四、几种常见图形的面积和形心的位置（课本 94 页图 4-16）

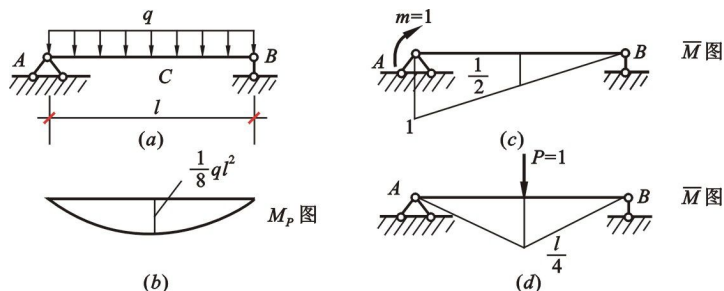
五、图乘法计算位移的解题步骤

1. 画出结构在实际荷载作用下的弯矩图 M_p ；
2. 据所求位移选定相应的虚拟状态，画出单位弯矩图 M ；
3. 分段计算一个弯矩图形的面积 ω 及其形心所对应的另一个弯矩图形的竖标 y_c ；
4. 将 ω 、 y_c 代入图乘法公式计算所求位移。

六、应用举例

例 1. 求图 (a) 所示的梁 A 截面的角位移 φ_A 及 C 点的竖向线位移 Δ_{CV} 。已知 EI 为常数。

解：(1) 求 φ_A



1) 实际荷载作用下的弯矩图 M_p 如图(b)所示。

2) 在 A 端加单位力偶 $m=1$ ，其单位弯矩图 \overline{M} 如图 (c) 所示。

3) M_p 图面积及其形心对应 \overline{M} 图竖标分别为

$$\omega = \frac{2}{3} \times l \times \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{12} ql^3 \quad y_c = \frac{1}{2}$$

$$\text{则 } \varphi_A = \frac{\omega y_c}{EI} = \frac{ql^3}{24EI} \quad (\text{与假设方向相同})$$

(2) 求 Δ_{CV}

1) 在 C 端加单位力 $P=1$ ，其单位弯矩图 \overline{M} 如图 (d) 所示。

2) M_p 图面积及其形心对应 \overline{M} 图竖标分别为

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{24} ql^3 \quad y_1 = y_2 = \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} l = \frac{5}{32} l$$

$$\text{则 } \Delta_{CV} = \sum \frac{\omega y_C}{EI} = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2}{EI} = \frac{2}{EI} \times \frac{1}{24} q l^3 \times \frac{5}{32} l = \frac{5}{384} q l^4 (\downarrow) \quad (\text{与假设方向相同})$$

例 2. 求图 (a) 所示的梁 A 截面的角位移 φ_A 及 C 点的竖向线位移 Δ_{CV} 。已知 EI 为常数。

解: (1) 求 φ_A

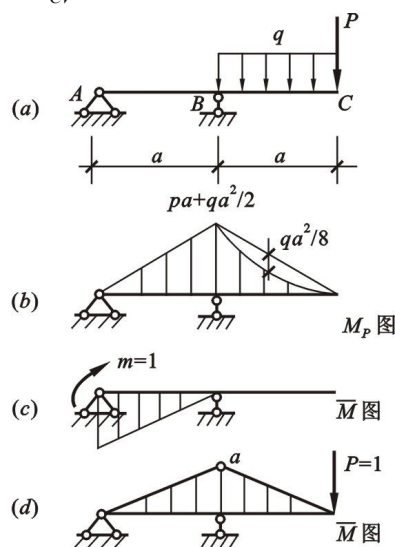
1) 实际荷载作用下的弯矩图 M_P 如图 (b) 所示。

2) 在 A 端加单位力偶 $m=1$, 其单位弯矩图 \bar{M} 如图 (c) 所示。

3) M_P 图面积及其形心对应 \bar{M} 图竖标分别为

$$\omega = \frac{1}{2} a (Pa + qa^2/2) \quad y_C = \frac{1}{3}$$

$$\text{则 } \varphi_A = \frac{\omega y_C}{EI} = -\frac{2Pa^2 + qa^3}{12EI} \quad (\text{与假设方向相反, 逆时针转动})$$



(2) 求 Δ_{CV}

1) 在 C 端加单位力 $P=1$, 其单位弯矩图 \bar{M} 如图 (d) 所示。

2) M_P 图面积及其形心对应 \bar{M} 图竖标分别为

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} a (Pa + qa^2/2) \quad y_1 = y_2 = \frac{2}{3} a$$

$$\omega_3 = \frac{2}{3} a (qa^2/8) = \frac{qa^3}{12} \quad y_3 = \frac{1}{2} a$$

$$\text{则 } \Delta_{CV} = \sum \frac{\omega y_C}{EI} = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 - \omega_3 y_3}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} Pa^3 + \frac{7}{24} qa^4 \right) \quad (\text{与假设方向相同})$$

例 3. 计算图 (a) 所示悬臂刚架 D 点的竖向位移 Δ_{DV} 。各杆 EI 如图示。

解: (1) 实际荷载作用下的弯矩图 M_P 如图 (b) 所示。

(2) 在 D 端加单位力 $P=1$, 单位弯矩图 \bar{M} 如图 (c) 所示。

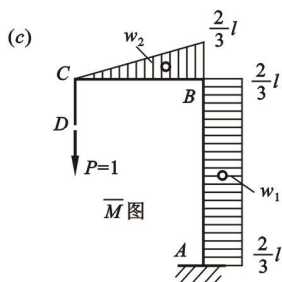
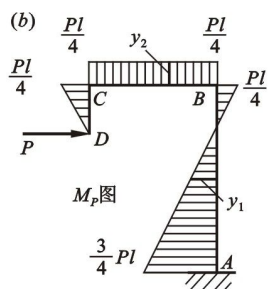
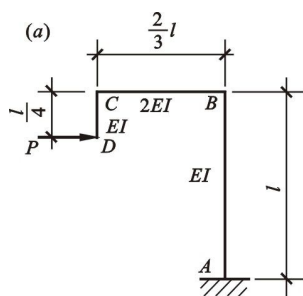
(3) 计算 ω 、 y_C

图乘时应分 AB、BC、CD 三段进行, 由于 CD 段 $M=0$, 可不计入, 故只计算 AB、BC 两段。

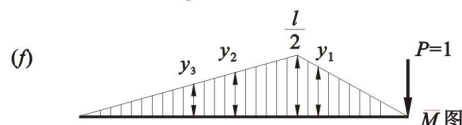
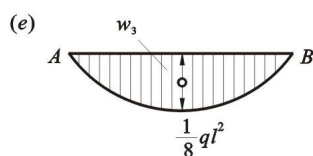
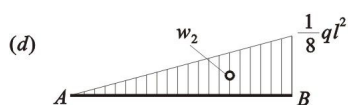
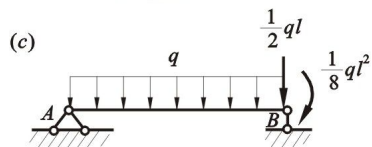
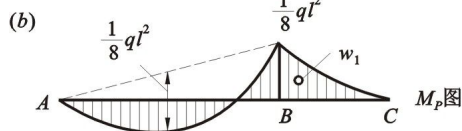
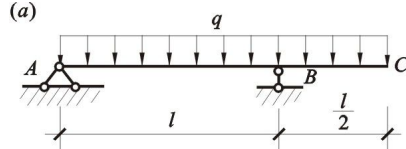
$$\text{AB 段: } \omega_1 = l \times \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} l^2 \quad (\text{取自 } \bar{M} \text{ 图}) \quad y_1 = \frac{1}{4} Pl$$

$$\text{BC 段: } \omega_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} l \times \frac{2}{3} l = \frac{2}{9} l^2 \quad (\text{取自 } \bar{M} \text{ 图}) \quad y_2 = \frac{1}{4} Pl$$

(4) 计算 Δ_{DV}
$$\Delta_{DV} = \sum \frac{\omega y_C}{EI} = \frac{-\omega_1 y_1}{EI} + \frac{\omega_2 y_2}{2EI} = -\frac{5Pl^3}{36EI} (\uparrow) \quad (\text{与假设方向相反})$$



例 3 图



例 4 图

例 4. 计算图(a)所示外伸梁 C 点的竖向位移 Δ_{CV} 。EI 为常数。

解: (1) 实际荷载作用下的弯矩图 M_p 如图(b)所示。

(2) 在 C 处加竖向单位力 $P=1$, 其弯矩图 \bar{M} 如图(f)所示。

(3) 计算 ω 、 y_C

BC 段: $\omega_1 = \frac{1}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{48} ql^3$

$y_1 = \frac{3}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{3}{8} l$

AB 段: $\omega_2 = \frac{1}{2} \times l \times \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{16} ql^3$

$y_2 = \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} = \frac{1}{3} l$

$\omega_3 = \frac{2}{3} \times l \times \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{12} ql^3$

$y_3 = \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{1}{4} l$

(4) 计算 Δ_{CV}

$$\Delta_{CV} = \sum \frac{\omega y_C}{EI} = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 - \omega_3 y_3}{EI} = \frac{ql^4}{128EI} (\downarrow)$$

§ 4-6 支座移动时的位移计算

一、支座移动对静定结构的影响

1. 支座移动会使结构产生刚体位移
2. 支座移动对静定结构不产生内力，也无变形

二、支座移动时的位移计算

1. 计算公式：
$$\Delta = -\overline{R}_i C_i$$

2. 各参数的含义

\overline{R}_i ——虚设单位荷载作用下的支座反力；

C_i ——实际状态下的支座位移；

$\overline{R}_i C_i$ —— \overline{R}_i 的方向与位移 C_i 方向一致时乘积为正值，反之为负。

二、应用举例

例 1. 已知简支梁 AB 跨度为 l ，右支座 B 竖直下沉 Δ ，如图(a)所示。求梁中点 C 的竖向位移 Δ_{CV} 。

解：(1) 在梁中点 C 处加单位力 $P=1$ ，如图(b)所示

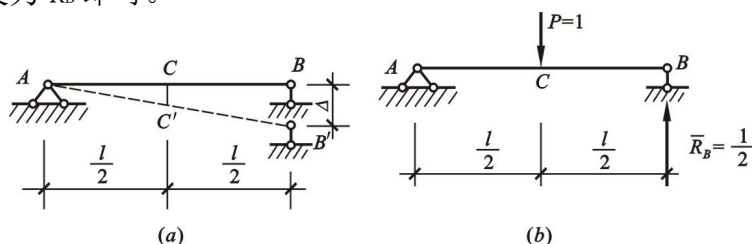
(2) 计算单位荷载作用下的支座反力

由于 A 支座位移，故只需计算 B 支座反力 R_B 即可。

由于对称，B 支座反力 $R_B = 1/2$ (↑)

(3) 计算 Δ_{CV}

$$\Delta_{CV} = -\overline{R}_i C_i = -\left(-\frac{1}{2}\Delta\right) = \frac{\Delta}{2} (\downarrow)$$



计算结果为正，说明 Δ_{CV} 与虚设单位力的方向一致。

例 2. 三铰刚架的跨度 $l=12\text{m}$ ，高为 $h=8\text{m}$ 。已知右支座 B 发生了竖直沉陷 $C_1=6\text{cm}$ ，同时水平移动了 $C_2=4\text{cm}$ (向右)，如图(a)所示。试求由此引起的左支座 A 处的杆端转角 φ_A 。

解：(1) 在 A 处虚设单位力偶 $m=1$ ，如图(b)所示。

(2) 计算单位荷载作用下的支座反力

由于 A 支座位移，故只需计算 B 支座反力即可。

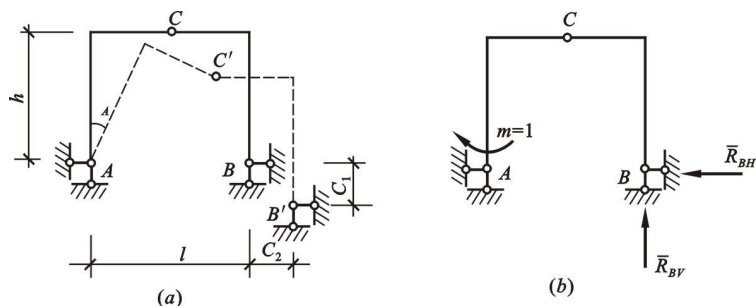
取整体为隔离体，由 $\sum M_A = 0$ 得

$$\overline{R}_{BV} = \frac{1}{l} (\uparrow)$$

取右半刚架 BC 为隔离体，由 $\sum M_C = 0$ 得

$$\overline{R}_{BH} = \frac{1}{2h}$$

(3) 计算 φ_A



$$\varphi_A = -\sum \overline{R}_i C_i = -\left(-\frac{1}{12} \times 6 \times 10^{-2} - \frac{1}{2 \times 8} \times 4 \times 10^{-2}\right) = 0.0075 \text{ rad} \quad (\text{与假设方向相同})$$

计算结果为正，说明 φ_A 与虚设单位力偶 $m=1$ 的转向一致。

例 4.8(课本 98 页)

§ 4-7 温度改变时静定结构的位移计算

一、温度改变对静定结构的影响

1. 温度改变会使材料产生热胀冷缩，从而使结构产生变形和位移
2. 温度改变对静定结构不引起内力

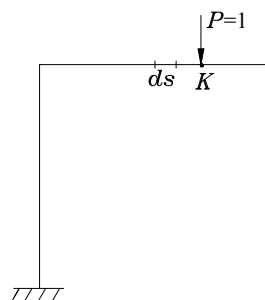
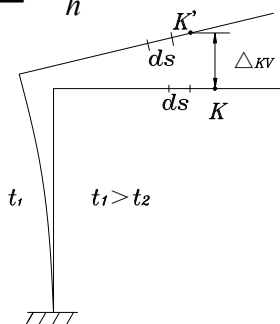
二、温度改变时的位移计算

1. 计算公式的推导：
$$\Delta = \sum \alpha t_0 \overline{F_N} l + \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \omega$$

$$\Delta_K = \sum \int \overline{F_N} du + \sum \int \overline{M} d\varphi + \sum \int \overline{F_Q} \gamma ds$$

(1) 杆件形心轴处的伸长 (轴向变形)

$$\begin{aligned} du &= \alpha t_1 ds + (\alpha t_2 ds - \alpha t_1 ds) \frac{h_1}{h} \\ &= \alpha \left(\frac{h_2}{h} t_1 + \frac{h_1}{h} t_2 \right) ds = \alpha t_0 ds \end{aligned}$$

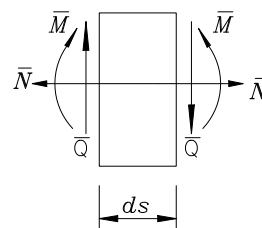
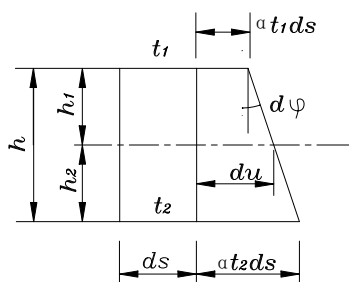


其中 t_0 是形心轴处的温度改变值，当截

面对称于形心轴时， $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$ 。

(2) 微段两端截面的相对转角 (弯曲)

$$d\varphi = \frac{\alpha t_2 ds - \alpha t_1 ds}{h} = \alpha \frac{\Delta t}{h} ds$$



其中 $\Delta t = t_2 - t_1$ ，是杆件两侧温度变化之差。

(3) 杆件无剪切变形， $\gamma = 0$ 。

$$\begin{aligned} \Delta_K &= \sum \int \overline{F_N} du + \sum \int \overline{M} d\varphi = \sum \overline{F_N} \alpha t_0 ds + \sum \overline{M} \alpha \frac{\Delta t}{h} ds = \sum \alpha t_0 \overline{F_N} l + \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \omega \\ &= \sum \pm \alpha t_0 \omega_{\overline{F_N}} + \sum \pm \alpha \frac{\Delta t}{h} \omega_{\overline{M}} \end{aligned}$$

2. 各参数的含义

α —— 材料的线膨胀系数；

t_0 —— 形心轴处的温度改变值，温度升高为正，降低为负；

Δt —— 杆件两侧温度改变值的差值，取其绝对值；

$\overline{F_N}$ —— 虚设单位荷载作用下各杆的轴力值，受拉为正，受压为负；

l —— 杆件的长度；

h —— 杆件截面的高度；

ω ——虚设单位荷载作用下 \overline{M} 图的面积；

$\omega\Delta t$ —— \overline{M} 图和温度变化引起的变形趋势一致时乘积为正值，反之为负。

三、应用举例

例 4.9(课本 100 页)

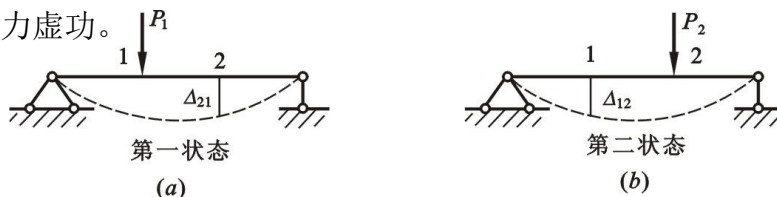
§ 4-8 线弹性变形体的互等定理

一、功（虚功）的互等定理

1. 叙述：第一种状态的力在第二种状态的位移上所作的外力虚功，等于第二种状态的力在第一种状态的位移上所作的外力虚功。

2. 公式：

$$F_1\Delta_{12} = F_2\Delta_{21}$$



在状态一中，外力用 F_1 表示，内力用 M_1 、 F_{N1} 、 F_{Q1} 表示，应变用 k_1 、 ε_1 、 γ_1 表示；

在状态二中，外力用 F_2 表示，内力用 M_2 、 F_{N2} 、 F_{Q2} 表示，应变用 k_2 、 ε_2 、 γ_2 表示。

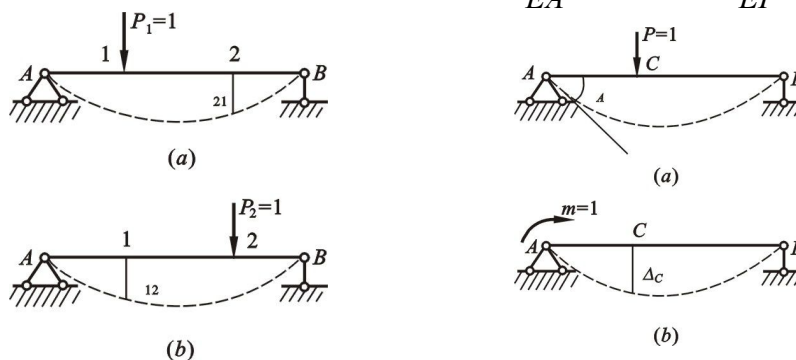
令状态一的力在状态二的位移上做虚功，虚功方程为

$$W_{12} = F_1\Delta_{12} = \sum \int F_{N1}\varepsilon_2 ds + \sum \int M_1k_2 ds + \sum \int F_{Q1}\gamma_2 ds = \sum \int \frac{F_{N1}F_{N2}}{EA} ds + \sum \int \frac{M_1M_2}{EI} ds + \sum \int \frac{kF_{Q1}F_{Q2}}{GA} ds$$

令状态二的力在状态一的位移上做虚功，虚功方程为

$$W_{21} = F_2\Delta_{21} = \sum \int F_{N2}\varepsilon_1 ds + \sum \int M_2k_1 ds + \sum \int F_{Q2}\gamma_1 ds = \sum \int \frac{F_{N2}F_{N1}}{EA} ds + \sum \int \frac{M_2M_1}{EI} ds + \sum \int \frac{kF_{Q2}F_{Q1}}{GA} ds$$

二、位移互等定理



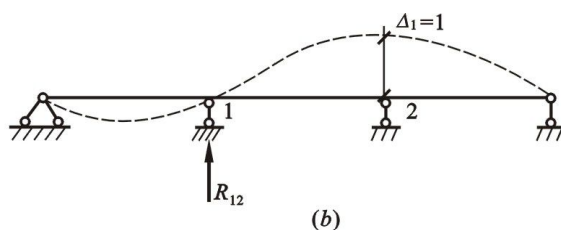
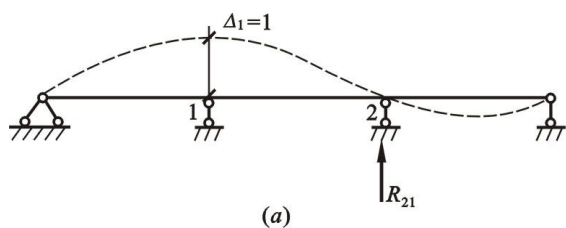
1. 叙述：由 $F_1 = 1$ 引起的沿 F_2 作用点及方向上的位移，等于由 $F_2 = 1$ 引起的沿 F_1 作用点及方向上的位移。

2. 公式：
$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad \Delta_C = \varphi_A \quad \left(\Delta_C = \frac{Pl^2}{16EI}, \varphi_A = \frac{Ml^2}{16EI} \right)$$

注意：这里的单位力是广义单位力，位移是相应的广义位移。等号两侧的系数可同是线位移，同是角位移，也可一个是线位移而另一个是角位移。

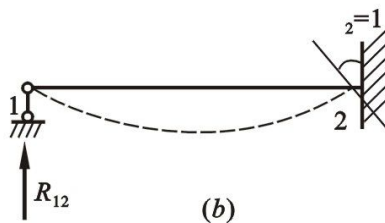
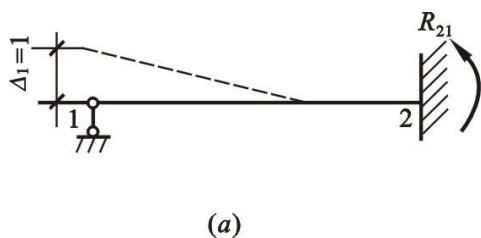
三、反力互等定理

1. 叙述：由于支座 1 发生位移 $\Delta_1 = 1$ 引起的沿支座 2 方向的支座反力，等于由于支座 2 发生位移 $\Delta_2 = 1$ 引起的沿支座 1 方向的支座反力。



2. 公式：

$$r_{12} = r_{21}$$



注意：(1) 此定理是功的互等定理的一个特殊情况，并且只适用于超静定结构。

- (2) 应用上述定理可知反力 R_{12} 与反力 R_{21} 相等，虽然它们一个代表力，一个代表力偶，两者含义不同，但在数值上是相等的。

第四章 小 结

- 一、了解结构位移计算依据的虚功原理及杆系结构位移计算一般公式的推导。
- 二、弄清线性变形体位移计算一般公式的物理意义。
- 三、掌握用虚设单位荷载法求各类静定结构的位移，**熟练应用图乘法求梁和刚架的位移。**

要求掌握：

- 1. 重点掌握静定结构在荷载作用下的位移计算；
- 2. 静定结构在温度改变时的位移计算；
- 3. 静定结构在支座发生移动时的位移计算。

第五章 影响线

§ 5-1 影响线的概念

一、移动荷载的概念

1. 固定荷载——荷载作用位置固定不变。
2. 移动荷载——大小相对确定但作用位置随时间不断变化，如汽车、火车、厂房吊车等。
3. 二者的区别

- (1) 在固定荷载作用下，结构内力与位移是确定的，某截面的内力是定值；
- (2) 在移动荷载作用下，结构某截面的内力随荷载位置的变化而变化。

二、本章讨论的主要问题

1. 结构上某截面的内力或支座反力随移动荷载位置变化而变化的规律。
2. 研究移动荷载的最不利位置，并求出支座反力或内力的最大值，作为结构设计的依据。

三、影响线

1. 概念——在单位移动荷载 $P=1$ 作用下，结构某一截面的支座反力或内力的变化规律用图形表示出来，称为该量值的影响线。
2. 绘制方法——静力法和机动法

§ 5-2 用静力法作静定梁的影响线

一、静力法作图的原理和步骤

1. 选择坐标系，定坐标原点，并用变量 x 表示单位移动荷载 $P=1$ 的作用位置；
2. 列出某截面内力或支座反力关于 x 的静力平衡方程，并注明变量 x 的取值范围；
3. 根据影响线方程绘出影响线。

注意：（1）内力或支座反力的正负号规定：弯矩和剪力同前，竖向支座反力以向上为正；
（2）量值的正值画在杆轴上侧，负值画在杆轴下侧。

二、应用举例

1. 简支梁

$$\sum M_A = 0 \quad R_B \times l - 1 \times x = 0 \Rightarrow R_B = \frac{x}{l} \quad (0 \leq x \leq l)$$

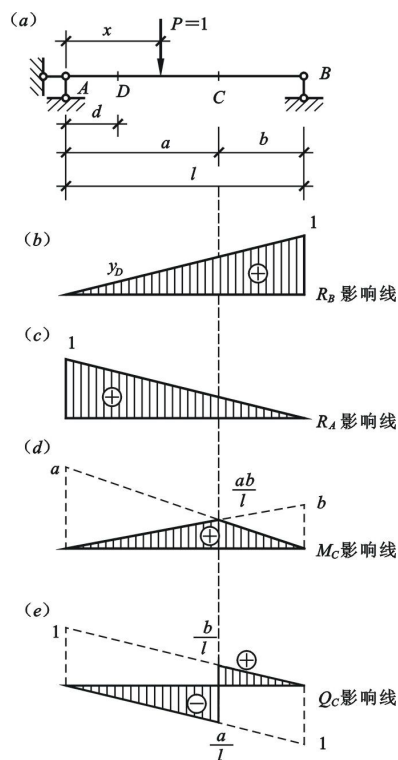
$$\sum M_B = 0 \quad R_A \times l - 1 \times (l - x) = 0 \Rightarrow R_A = \frac{l - x}{l} \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$P=1 \text{ 位于 C 点左侧时, } F_{QC} = -R_B = -\frac{x}{l} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$M_C = R_B \times b = \frac{b}{l} x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$P=1 \text{ 位于 C 点右侧时, } F_{QC} = R_A = \frac{l - x}{l} \quad (a \leq x \leq l)$$

$$M_C = R_A \times a = \frac{a}{l} (l - x) \quad (a \leq x \leq l)$$



2. 外伸梁——设外伸梁如图所示，需作出反力 R_A 、 R_B 以及截面 C 和 D 的弯矩、剪力影响线。

(1) 反力影响线

取支座 A 为坐标原点，以 $P=1$ 作用点到 A 点的距离为变量 x ，且取 x 以向右为正。利用简支梁平衡条件分别求得 R_A 和 R_B 的影响线方程为

$$R_A = \frac{l-x}{l} \quad (-l_1 \leq x \leq l+l_2)$$

$$R_B = \frac{x}{l} \quad (-l_1 \leq x \leq l+l_2)$$

(2) 简支部分任意截面 C 的内力影响线

当 $P=1$ 位于截面 C 以左时，

$$M_C = R_B \times b = \frac{b}{l} x \quad (-l_1 \leq x \leq a)$$

$$F_{QC} = -R_B = -\frac{x}{l} \quad (-l_1 \leq x \leq a)$$

当 $P=1$ 位于截面 C 以右时，则有

$$M_C = R_A \times a = \frac{a}{l}(l-x) \quad (a \leq x \leq l+l_2)$$

$$F_{QC} = R_A = \frac{l-x}{l} \quad (a \leq x \leq l+l_2)$$

(3) 外伸部分任意截面 D 的内力影响线

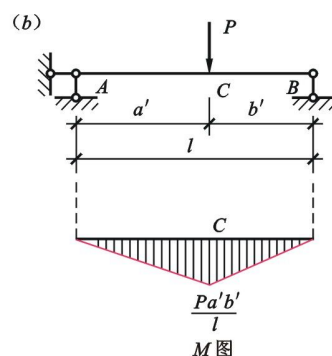
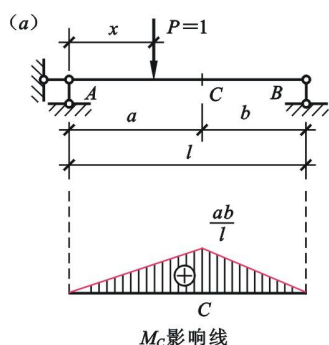
当 $P=1$ 位于 D 以左部分时，有 $M_D = -1 \cdot x$

$$F_{QD} = -1$$

当 $P=1$ 位于 D 以右部分时，则有 $M_D = 0$

$$F_{QD} = 0$$

特别注意：不要把影响线和一个集中荷载作用下简支梁的弯矩图混淆。



§ 5-3 用机动法作静定梁的影响线

一、机动法作图的基本原理——刚体体系的虚位移原理（虚设单位位移法）

二、作图步骤

1. 撤掉与所求量值相对应的约束（支座或与截面内力对应的约束），用正方向的量值来代替；
2. 沿所求量值正方向虚设单位位移，并画出整个梁的刚体位移图；
3. 应用刚体体系的虚功原理建立虚功方程，导出所求量值与位移图之间的关系，即为影响线。

§ 5-4 影响线的应用

一、当荷载位置固定时求某量值

1. 集中荷载作用

图(a)所示的外伸梁上,作用一组位置确定的集中荷载 P_1 、 P_2 、 P_3 。现拟求截面C的弯矩 M_C 。

首先作出 M_C 影响线如图(b)所示,并计算出对应各荷载作用点的竖标 y_1 、 y_2 、 y_3 。根据叠加原理可知,在 P_1 、 P_2 、 P_3 共同作用下, M_C 值为

$$M_C = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$$

在这组集中荷载共同作用下,量值为 $Z = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots + P_n y_n = \sum P_i y_i$

说明: P_i 与单位移动荷载 $P=1$ 方向一致为正,即向下为正; y_i 与影响线正负号相同。

2. 均布荷载作用

图(a)所示简支梁DE段作用均布荷载 q ,求截面C的剪力 F_{QC} 。

首先作出截面C的 F_{QC} 影响线,如图(b)所示。全部均布荷载

作用下的 F_{QC} 值为 $F_{QC} = \int_D^E y \cdot q dx = q \int_D^E y dx = q\omega$

同理,当梁上作用有荷载集度各不相同的均布荷载,或不连续的均布荷载时,则应逐段计算,然后求其代数和,即

$$Z = \sum q_i \omega_i$$

说明: q_i 与单位移动荷载 $P=1$ 方向一致为正,即向下为正; ω_i 表示均布荷载 q_i 作用区段内的面积,与影响线正负号相同。

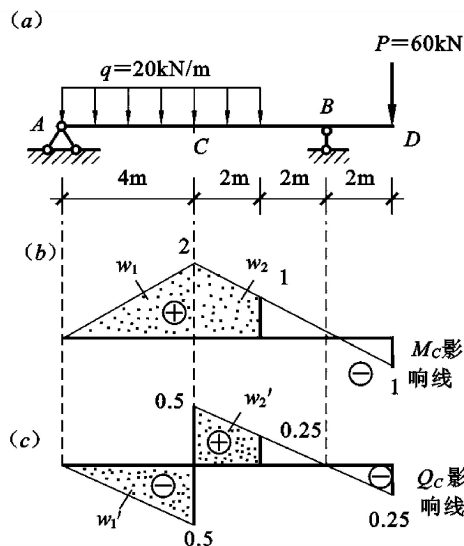
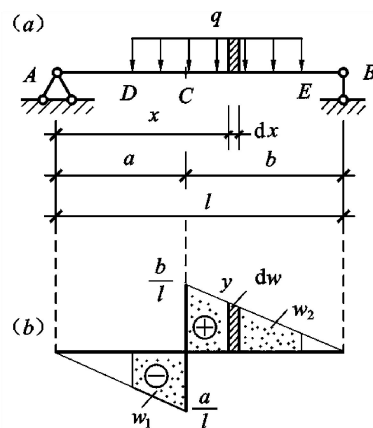
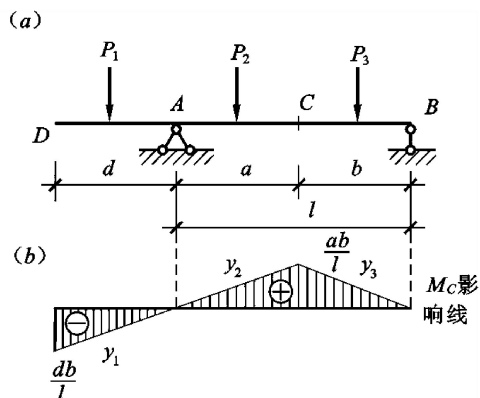
例 1. 试利用影响线计算图(a)所示梁在图示荷载作用下的截面C的弯矩 M_C 和剪力 F_{QC} 值。

解: (1) 作 M_C 、 Q_C 影响线分别如图(b)、(c)所示。

(2) 计算 P 作用点及 q 作用范围边缘所对应的的影响线图上的竖标 y_i 值,分别见图(b)、(c)所示。

(3) 计算 M_C 、 F_{QC}

$$\begin{aligned} M_C &= P y + q(\omega_1 + \omega_2) \\ &= 60 \times (-1) + 20 \times \left[\frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} (2+1) \times 2 \right] = 80 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

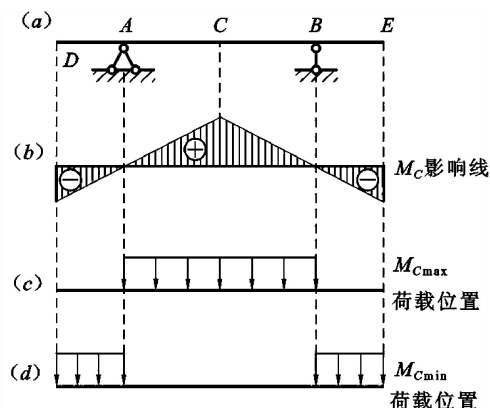


$$F_{Q_C} = 60 \times (-0.25) + 20 \times \left[\frac{1}{2} \times (0.5 + 0.25) \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 \times 0.5 \right] = -20 \text{ kN}$$

二、确定荷载最不利位置

1. 均布荷载

如果移动荷载是均布荷载，而且它可以任意断续布置，其分布长度也可以是任意的，则荷载的最不利位置易于由观察确定。由式 $Z = \sum q_i \omega_i$ 可得，在图(a)所示外伸梁中，由截面C的弯矩影响线图(b)可知，当均布荷载布满梁的AB段(图(c))时， M_C 为最大值 $M_{C_{\max}}$ ；当均布荷载布满梁的AD段和BE段(图(d))时， M_C 为最小值 $M_{C_{\min}}$ 。



2. 集中荷载

(1) 单个集中荷载作用

若移动荷载为单个竖向集中荷载 P ，则最不利荷载位置即在影响线竖标为最大值处，即

$$Z_{\max} = Py_{\max}$$

(2) 一组间距不变的集中荷载作用

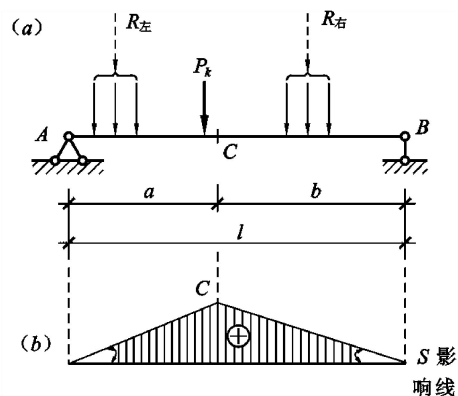
在一组间距不变的集中荷载作用下，影响线为三角形时，研究如何确定产生 Z_{\max} 的最不利位置。图(a)、(b)分别表示一大组、间距不变的移动荷载组和某一量值 Z 的三角形影响线。

①第一步，先求出使量值 Z 达到极值的荷载位置，称为荷载的临界位置。

②从荷载的临界位置中选出荷载的最不利位置，也就是从 Z 的极大值中选出最大值，从极小值中选出最小值。

说明：行列荷载的临界位置可能不止一个，故 Z 的极值也不止一个；荷载的最不利位置一定是荷载的临界位置。

行列荷载：一组大小、间距不变的移动集中荷载，如吊车轮压、汽车荷载等。



确定荷载临界位置的方法：

I. 当量值 Z 有极大值时，荷载自临界位置左移或右移 $\Delta Z \leq 0$

$$Z_1 = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots + P_n y_n \quad Z_2 = P_1 (y_1 + \Delta y_1) + P_2 (y_2 + \Delta y_2) + \cdots + P_n (y_n + \Delta y_n)$$

$$\text{即 } \Delta Z = Z_2 - Z_1 = \sum P_i \Delta y_i = \Delta x \sum P_i \tan \alpha_i \leq 0$$

当临界荷载右移时， $\Delta x > 0$ ， $\sum P_i \tan \alpha_i \leq 0$ ；当临界荷载左移时， $\Delta x < 0$ ， $\sum P_i \tan \alpha_i \geq 0$ 。

II. 当量值 Z 有极小值时，荷载自临界位置左移或右移 $\Delta Z \geq 0$

$$\text{即 } \Delta Z = Z_2 - Z_1 = \sum P_i \Delta y_i = \Delta x \sum P_i \tan \alpha_i \geq 0$$

当临界荷载右移时, $\Delta x > 0$, $\sum P_i \tan \alpha_i \geq 0$; 当荷载临界左移时, $\Delta x < 0$, $\sum P_i \tan \alpha_i \leq 0$ 。

说明: 极值两端 $\sum P_i \tan \alpha_i$ 变号; 注意 $\tan \alpha_i$ 的正负。

当影响线是三角形时, Z 有极大值的临界荷载 P_K 的判别式可简化为:

$$\tan \alpha_1 = \frac{h}{a} > 0, \quad \tan \alpha_2 = \frac{h}{b} < 0,$$

$$\text{临界荷载左移时, } \sum P_i \tan \alpha_i \geq 0 \Rightarrow \frac{\sum P_{\text{左}} + P_K}{a} \geq \frac{\sum P_{\text{右}}}{b}$$

$$\text{临界荷载右移时, } \sum P_i \tan \alpha_i \leq 0 \Rightarrow \frac{\sum P_{\text{左}}}{a} \leq \frac{P_K + \sum P_{\text{右}}}{b}$$

确定荷载的最不利位置, 求 Z 最大值的步骤:

- ①从荷载组中确定一个集中荷载 P_K , 使它位于影响线的顶点。
- ②利用上述判别式进行计算, 若满足, 则此荷载即为临界荷载, 荷载位置即为临界位置。
- ③对每一个临界位置可求出 Z 的一个极值, 然后从各个极值中选出最大值。

例 2. 图(a)所示为一跨度 12m 的简支吊车梁, 同时有两台吊车在其上工作。试求跨中截面 C 的最大弯矩 $M_{C\max}$ 。

解: (1) 作 M_C 影响线如图(c)所示。

(2) 判别临界荷载

由于当 P_2 (或 P_3) 位于影响线顶点 (图(b)) 时, 有较多的荷载位于顶点附近和梁上, 故可设 P_2 (或 P_3) 为临界荷载。

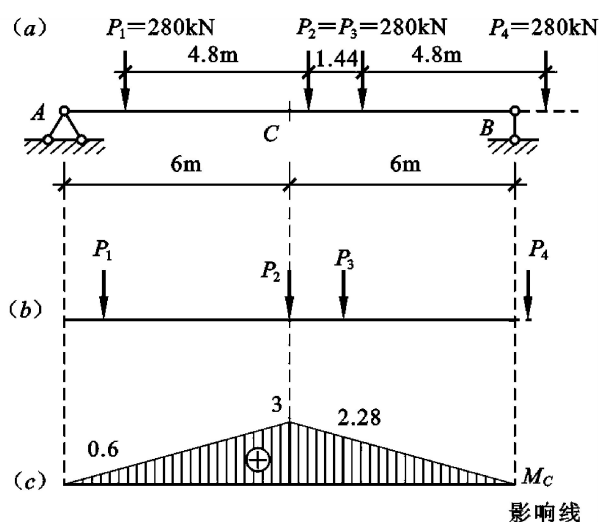
$$\frac{\sum P_{\text{左}} + P_K}{a} = \frac{280 \times 2}{6} \geq \frac{\sum P_{\text{右}}}{b} = \frac{280}{6}$$

$$\frac{\sum P_{\text{左}}}{a} = \frac{280}{6} \leq \frac{P_K + \sum P_{\text{右}}}{b} = \frac{280 \times 2}{6}$$

由计算结果可见, P_2 是临界荷载。

(3) 计算 $M_{C\max}$

P_1 、 P_2 、 P_3 作用点处所对应的 M_C 影响线上的竖标见图(c)。



$$M_{C\max} = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 = 280 \times (0.6 + 3 + 2.28) = 1646.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

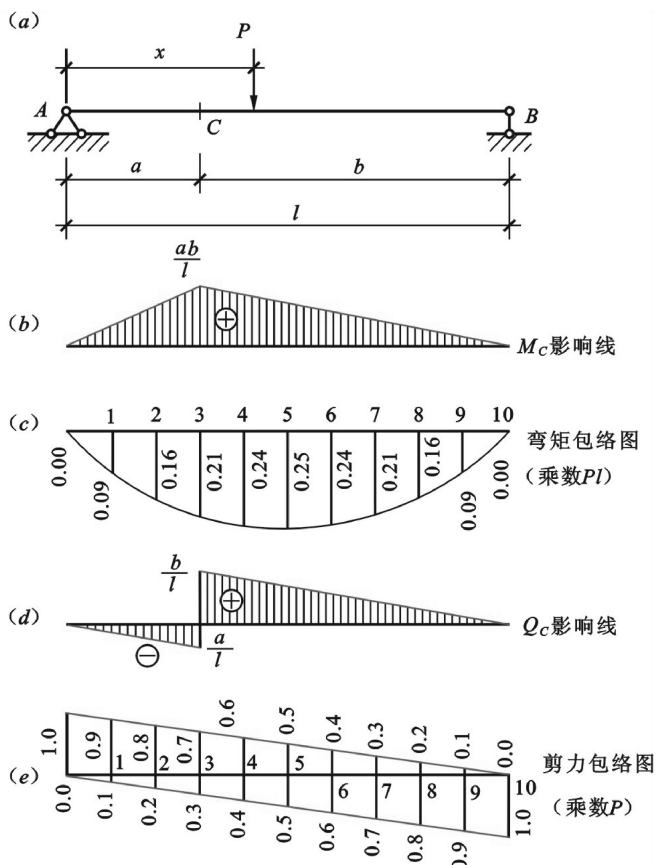
§ 5-5 简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩

一、简支梁的内力包络图

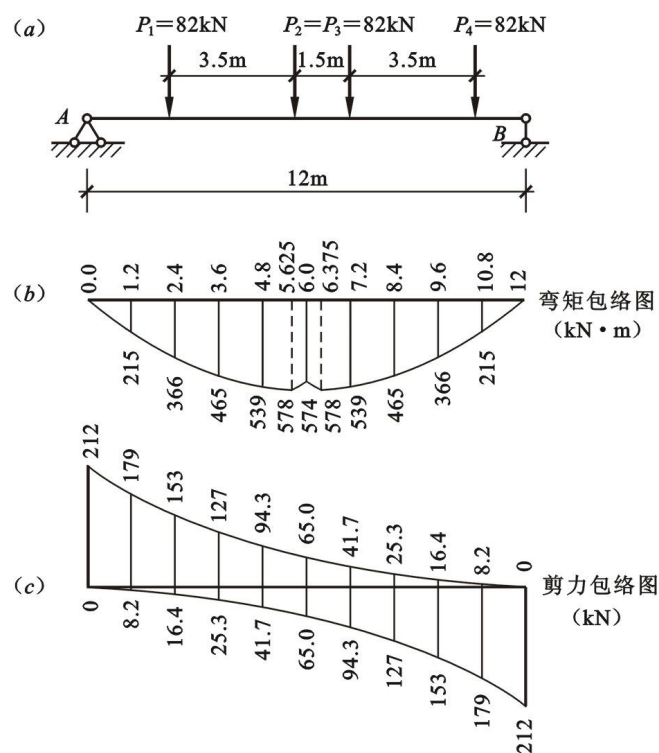
1. 概念——如果把简支梁上各截面内力的最大值和最小值按同一比例标在图上，连成曲线，这一曲线即称为内力包络图。

说明：梁的内力包络图有弯矩包络图和剪力包络图。包络图表示各截面内力变化的极限值，是结构设计的主要依据。

2. 单个移动集中荷载作用下简支梁的内力包络图



如图(a)所示简支梁，单个集中荷载 P 在梁上移动。 M_C 影响线已示于图(b)，弯矩包络图如图(c)所示，图(d)为 Q_C 影响线，剪力包络图如图(e)所示。



3. 一组间距一定的移动荷载作用下简支梁的内力包络图

图(a)所示为一简支梁，梁上有两台吊车，其荷载及间距如图中所示。将梁分成 10 等份，求出各等分点所在截面的弯矩最大值及剪力的最大(最小)值，在梁上按同一比例绘出竖标并连成曲线即为弯矩、剪力包络图，见图(b)、(c)所示。

由以上分析可知，弯矩包络图表示各截面弯矩可能变化的范围；剪力包络图表示各截面正号剪力到负号剪力的变化范围。

二、简支梁的绝对最大弯矩

1. 概念——弯矩包络图表示出了各截面的最大弯矩值，其中弯矩值最大者称为绝对最大弯矩。
2. 两个问题——确定在移动荷载作用下的绝对最大弯矩，与两个未知因素有关

(1) 产生绝对最大弯矩的截面位置；

(2) 产生绝对最大弯矩的荷载最不利位置。

3. 简支梁在一组移动荷载作用下绝对最大弯矩的求法

图(a)所示为一简支梁 AB 承受一组数值和间距不变的集中移动荷载作用。选择任一集中力为 F_{Pk} ，设其到左支座 A 的距离为 x ，梁上作用的所有荷载的合力为 F_R ， F_{Pk} 到 F_R 的距离用 a 表示，且设 F_{Pk} 位于 F_R 左侧。

(1) 利用合力矩定理对 F_{Pk} 作用点求矩，求得 a

说明：当 F_{Pk} 位于 F_R 左侧时， a 取正值；当 F_{Pk} 位于 F_R 右侧时， a 取负值。

(2) 假设 F_{Pk} 的作用位置是取得绝对最大弯矩的位置，用截面法求绝对最大弯矩 M_k

对 B 点求矩，先求 A 支座反力 R_A 。

$$R_A l - F_R(l - x - a) = 0 \Rightarrow R_A = \frac{F_R}{l}(l - x - a)$$

$M_k = R_A x - M_k^l = \frac{F_R}{l}(l - x - a)x - M_k^l$ ，其中 M_k^l 表示 F_{Pk} 左侧所有的荷载对 F_{Pk} 作用点处力矩之和，是一个与 x 无关的常数。

由极值定理，当 $\frac{dM_k}{dx} = 0$ 时， M_k 取得极值。

$$\frac{dM_k}{dx} = \frac{F_R}{l}(l - 2x - a) = 0, \text{ 即 } x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \text{ 时, } M_k \text{ 取得极大值 } M_{k \max}$$

$$M_{k \max} = \frac{F_R}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right)^2 - M_k^l$$

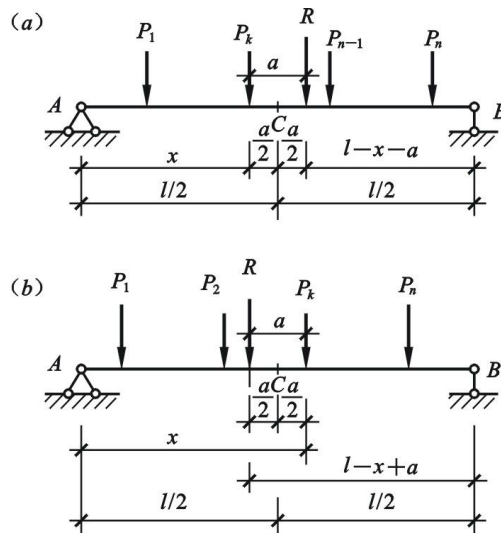
注意：1) F_R 表示梁上作用的所有荷载的合力，不包括移到梁范围以外的荷载；

2) 经验表明简支梁的绝对最大弯矩总是发生在梁中点附近，故使梁产生绝对最大弯矩的 F_{Pk} 通常就是使梁的跨中截面产生最大弯矩的临界荷载。

4. 求简支梁绝对最大弯矩的步骤

(1) 绘制跨中截面弯矩影响线，确定使该截面产生最大弯矩的临界荷载 F_{Pk} 。

(2) 求梁上实有荷载的合力 F_R 的大小及 F_R 到 F_{Pk} 的距离 a ，并判断 a 的正负。



(3) 使梁的跨中截面平分距离 a ，求 F_{Pk} 作用截面处的绝对最大弯矩 $M_{k\max}$ 。

例 3. 求图(a)所示吊车梁的绝对最大弯矩，并与跨中截面 C 的最大弯矩进行比较。已知 $P_1=P_2=P_3=P_4=82\text{kN}$ 。

解: (1) 求跨中截面 C 的最大弯矩 $M_{C\max}$

① 作 M_C 影响线如图(b)所示。

② 判别临界荷载。

由于当 P_2 (或 P_3) 位于影响线顶点时，有较多的荷载位于顶点附近和梁上，故可设 P_2 (或 P_3) 为临界荷载。

③ 计算 $M_{C\max}$

$$M_{C\max} = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 = 574\text{kN} \cdot \text{m}$$

(2) 求 AB 梁的绝对最大弯矩 $M_{k\max}$

由图(a)可见，绝对最大弯矩将发生在荷载 P_2 (或 P_3) 下面的截面，以荷载 P_2 为 F_{Pk} ，求绝对最大弯矩：

① 梁上荷载的合力 F_R $F_R = 82 \times 4 = 328\text{kN}$

② 确定 F_R 到 F_{Pk} 的距离 a $a = 1.5/2 = 0.75\text{m}$

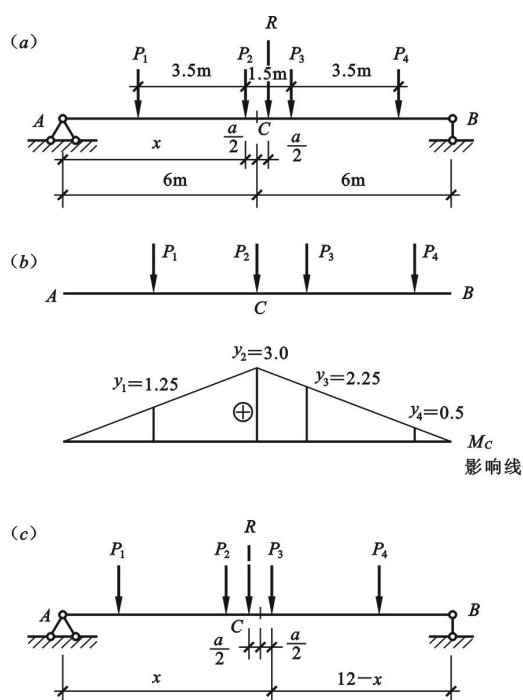
③ 确定 F_{Pk} 作用点位置 x

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2} = 6 - 0.375 = 5.625\text{m}$$

④ 计算最大弯矩

$$M_{k\max} = \frac{F_R}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right)^2 - M_k^l = \frac{328}{12} \times (6 - 0.375)^2 - 82 \times 3.5 = 578\text{kN} \cdot \text{m}$$

由于对称， P_3 为 F_{Pk} 时其荷载位置应如图(c)所示。故其作用截面处的最大弯矩应与 P_2 为 F_{Pk} 时的最大弯矩相等。



第六章 力法

§ 6-1 超静定结构的概念和力法的基本原理

一、超静定结构的概念

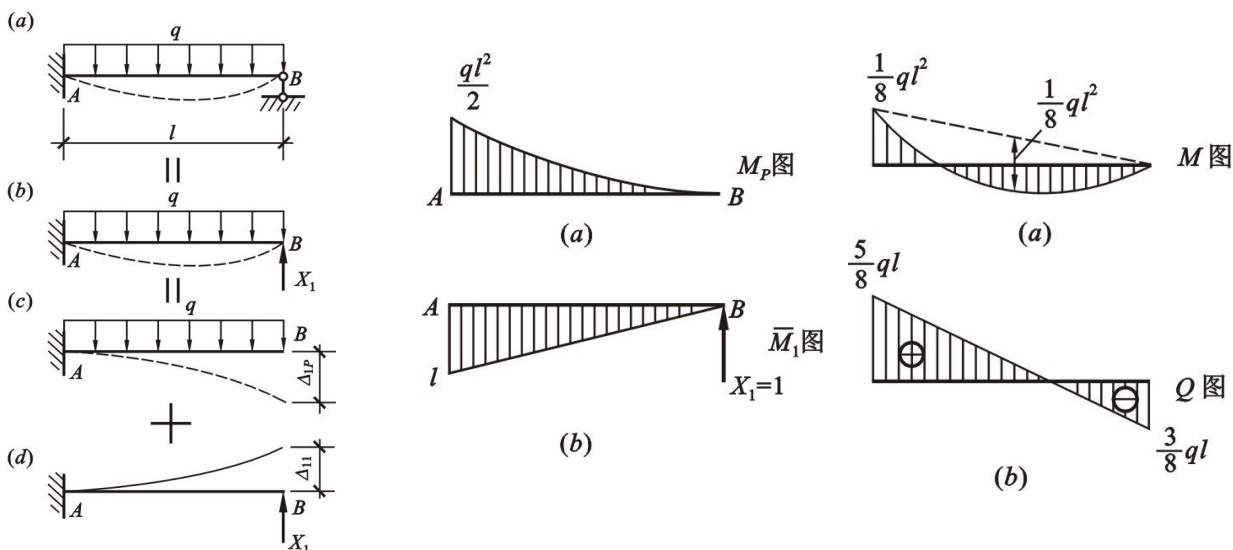
1. 几何组成——超静定结构是有多余约束的几何不变体系
2. 静力平衡——支座反力和各截面的内力不能完全由静力平衡条件唯一确定
3. 超静定结构与静定结构的本质区别——是否具有多余约束
4. 超静定结构内力计算的基本方法——力法和位移法

二、力法的基本原理（力法三要素）

1. 基本结构——去掉多余约束后所得到的静定结构，称为原结构的**基本结构**。
2. 基本未知量——待求的多余未知力 X_1 为力法的**基本未知量**。
3. 基本方程——求解多余未知力的位移方程，称为力法**基本方程**。

基本结构的变形位移状态应与原结构完全一致，即 B 点的竖向位移 Δ_1 必须为零，也就是说基本结构在已知荷载与多余未知力 X_1 共同作用下；在拆除约束处沿多余未知力 X_1 作用方向产生的位移应与原结构在 X_1 方向的位移相等。就是基本结构应满足的**变形协调条件**，又称**位移条件**。

综上所述，我们把这种取多余未知力作为基本未知量，去掉多余约束后的静定结构为基本结构，根据解除约束处的已知位移条件建立基本方程，利用计算静定结构的位移，达到求解超静定结构的方法，称为**力法**。



§ 6-3 超静定次数的确定与基本结构

一、超静定次数的确定

1. 超静定次数——多余约束的数目或多余未知力的数目。
2. 超静定次数的确定

(1) 公式一: $W = 3m - 3g - 2j - r$ 适用于所有的杆件结构

(2) 公式二: $W = 2k - m - r$ 适用于所有的桁架结构

式中: j ——单铰结点数目; k ——铰结点数目, 不区分单复数。

说明: 1) $W = 0$, 体系自由度 = 约束数目, 静定或瞬变;

2) $W > 0$, 体系自由度 > 约束数目, 几何常变;

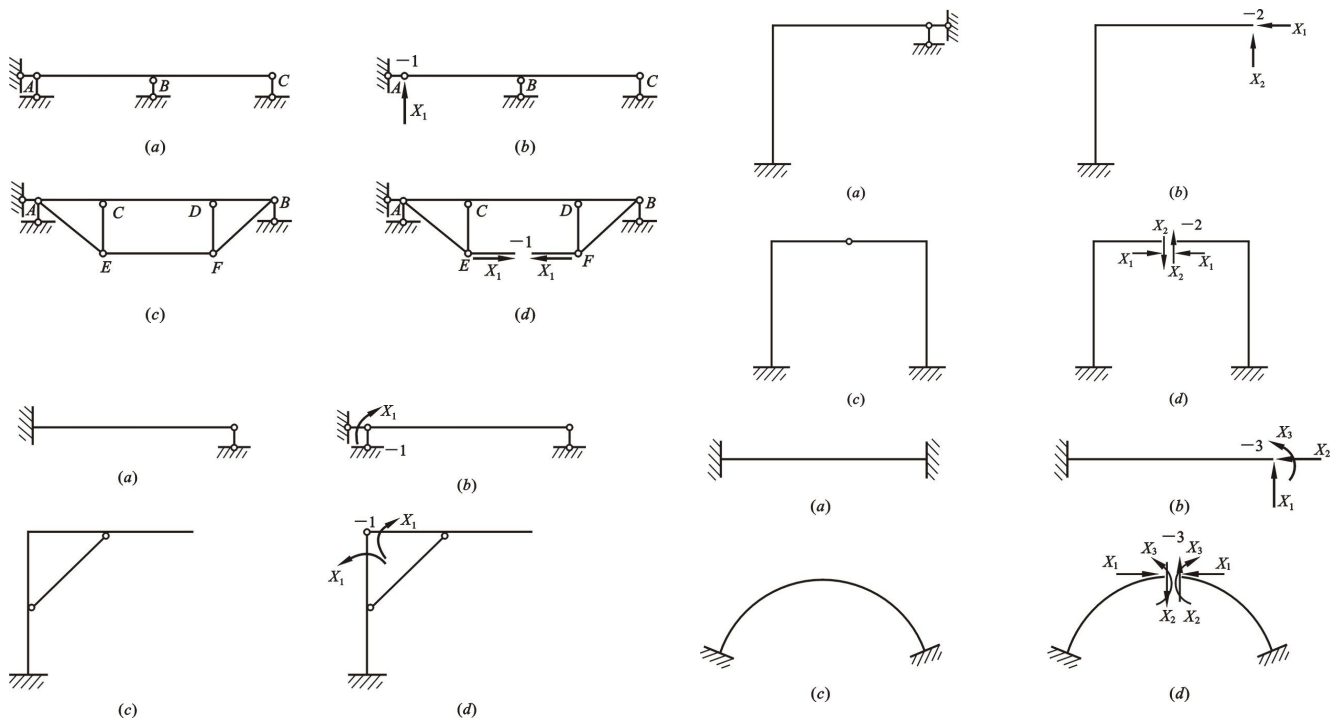
3) $W < 0$, 体系自由度 < 约束数目, 超静定次数 = $|W|$ 。

二、基本结构的建立

1. 判断超静定次数, 去掉多余约束用多余未知力代替, 使原结构变成静定结构即为原超静定结构的基本结构。

去掉多余约束的方式一般有以下几种:

- (1) 去掉一根支座链杆或切断一根链杆等于去掉一个约束, 图 1。
- (2) 去掉一个铰支座或拆去联结两刚片的单铰等于去掉两个约束, 图 2。
- (3) 将固定端支座改成铰支座, 或将刚性联结改成单铰联结, 等于去掉一个约束, 图 3。
- (4) 去掉一个固定端支座或切开刚性联结等于去掉三个约束, 图 4。



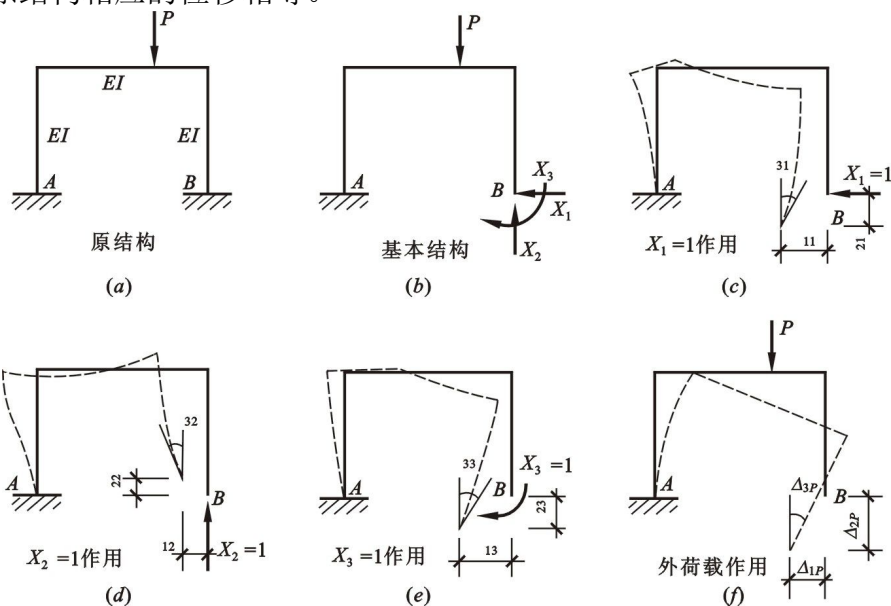
2. 注意

- (1) 去掉多余约束的方式可以不同, 但去掉多余约束的数目是相同的。
- (2) 去掉多余约束时, 要把全部多余约束都去掉, 但不要把原结构拆成几何可变体系 (包括瞬变)。

§ 6-4 力法典型方程

图示一个三次超静定刚架。现去掉固定支座 B, 加上相应的多余未知力 X_1 、 X_2 和 X_3 , 便得到图 (b) 所示的基本结构。由位移条件可知, 基本结构在外荷载和多余未知力 X_1 、 X_2 和 X_3 共同作用下, B 处的水平位移 Δ_1 、竖向位移 Δ_2 和角位移 Δ_3 即分别沿 X_1 、 X_2 和 X_3 方向的位移都应等于零, 即 $\Delta_1=0$; $\Delta_2=0$; $\Delta_3=0$

其物理意义是：基本结构在全部多余未知力和已知荷载作用下，沿着每个多余未知力方向的位移，应与原结构相应的位移相等。



$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\Delta_3 = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0$$

对于 n 次超静定结构有 n 个多余约束，也就是有 n 个多余未知力 X_1, X_2, \dots, X_n ，且在 n 个多余约束处有 n 个已知的位移条件，故可建立 n 个方程，当原结构在荷载作用下各多余约束处的位移为零时，有

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0$$

$$\Delta_i = \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iP} = 0$$

$$\Delta_n = \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0$$

上式为力法方程的一般形式，常称为**力法典型方程**。

式中： δ_{ii} ——主系数，恒大于零，由 $\overline{M_i}$ 图自乘求得；

δ_{ij} ——副系数，可正可负可为零，由 $\overline{M_i}$ 和 $\overline{M_j}$ 图乘求得，根据位移互等定理有 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ；

Δ_{iP} ——自由项，可正可负可为零，由 $\overline{M_i}$ 和 M_P 图乘求得。

§ 6-5 力法的计算步骤和举例

一、力法的计算步骤

1. 选取基本结构。确定原结构的超静定次数，去掉所有的多余约束代之以相应的多余未知力 X_i ，从而得到基本结构。
2. 建立力法方程。根据基本结构在多余未知力和荷载共同作用下，沿多余未知力方向的位移应与原结构中相应的位移具有相同的条件，建立力法方程。

3. 计算系数和自由项。首先作基本结构在荷载和各单位未知力分别单独作用在基本结构上的弯矩图 M_p 和 \overline{M}_i 或写出内力表达式, 然后按求位移的方法计算系数和自由项。

4. 求多余未知力。将计算的系数和自由项代入力法方程, 求解得各多余未知力 X_i 。

5. 绘制内力图。求出多余未知力后, 按分析静定结构的方法, 绘制原结构最后内力图。最后弯矩图也可以利用已作出的基本结构的单位弯矩图和荷载弯矩图按叠加求得。

二、计算举例

例 1. 作图 (a) 所示单跨超静定梁的内力图。已知梁的 EI 、 EA 均为常数。

解: (1) 选取基本结构 原结构是三次超静定梁, 去掉支座 B 的固定端约束, 并代之以相应的多余未知力 X_1 、 X_2 和 X_3 , 得到图 (b) 所示的悬臂梁作为基本结构。

(2) 建立力法方程 根据原结构支座 B 处位移为零的条件, 可以建立如下力法方程

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0$$

(3) 计算系数和自由项 分别作基本结构的荷载弯矩图 M_p 图和单位弯矩图 \overline{M}_1 图、 \overline{M}_2 图、 \overline{M}_3 图, 如图 (c)、(d)、(e)、(f) 所示, 利用图乘法求得力法方程中各系数和自由项分别为

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} \quad \delta_{22} = \frac{l}{EI} \quad \delta_{33} = \frac{l}{EA}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l^2}{2EI} \quad \delta_{13} = \delta_{31} = 0$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0 \quad \Delta_{3P} = 0$$

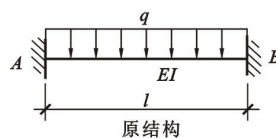
$$\Delta_{1P} = -\frac{ql^4}{8EI} \quad \Delta_{2P} = \frac{ql^3}{6EI}$$

(4) 求多余未知力 将以上各系数和自由项代入力法方程, 得

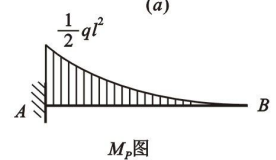
$$\frac{l^3}{3EI}X_1 - \frac{l^2}{2EI}X_2 - \frac{ql^4}{8EI} = 0$$

$$-\frac{l^2}{2EI}X_1 + \frac{l}{EI}X_2 + \frac{ql^3}{6EI} = 0$$

$$\frac{l}{EA}X_3 = 0$$

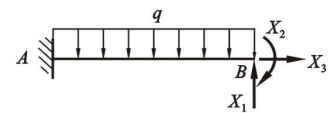


(a)



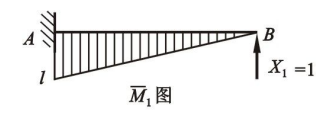
M_p 图

(c)



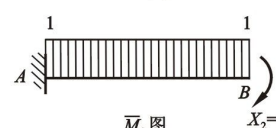
基本结构

(b)



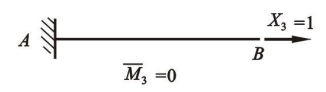
\overline{M}_1 图

(d)



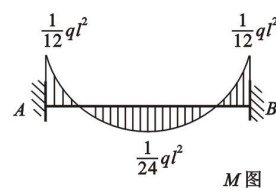
\overline{M}_2 图

(e)



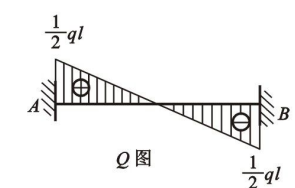
$\overline{M}_3 = 0$

(f)



M图

(g)



Q图

(h)

解得

$$X_1 = \frac{1}{2}ql, X_2 = \frac{1}{12}ql^2, X_3 = 0$$

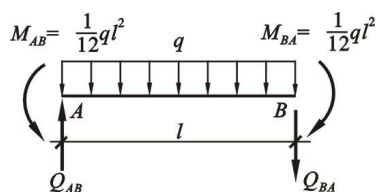
(5) 作内力图

① 作 M 图：根据叠加公式 $M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3 + M_p$

② 作剪力图：画 AB 梁的受力图如图所示。

$$\text{由 } \sum M_A = 0 \text{ 得 } F_{QBA} = -\frac{ql}{2}$$

$$\text{由 } \sum F_y = 0 \text{ 得 } F_{QAB} = \frac{ql}{2}$$



因为 AB 梁受到均匀分布荷载，剪力图应为斜直线，如图(h)所示。

例 2. 作图(a)所示连续梁的内力图。EI 为常数。

解：(1) 选取基本结构 此结构为一次超静定梁。将 B 点截面用铰来代替，以相应的多余未知力 X_1 代替原约束的作用，其基本结构如图(b)所示。

(2) 建立力法方程 位移条件：铰 B 两侧截面的相对转角应等于原结构 B 点两侧截面的相对转角。由于原结构的实际变形是处处连续的，显然同一截面两侧不可能有相对转动或移动，故位移条件为 B 点两侧截面相对转角等于零。由位移条件建立力法方程如下

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

(3) 计算系数和自由项 分别作基本结构的荷载弯矩图 M_p 图和单位弯矩图 \overline{M}_1 图，如图(c)、(d)所示。利用图乘法求得系数和自由项分别为

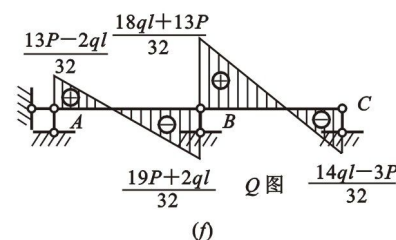
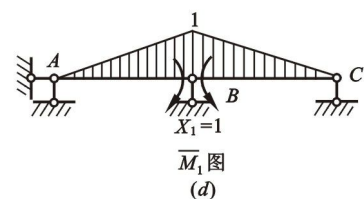
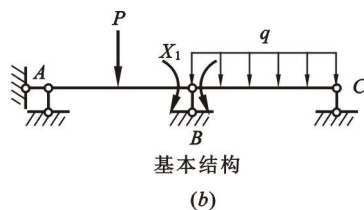
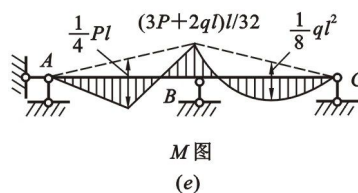
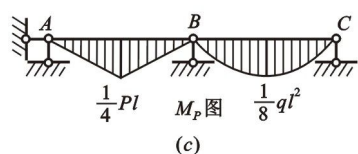
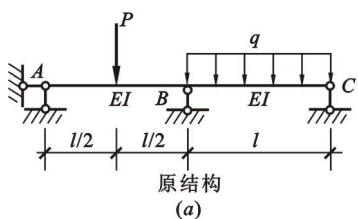
$$\delta_{11} = \frac{2l}{3EI} \quad \Delta_{1P} = -\frac{(3P+2ql)l^2}{48EI}$$

(4) 求多余未知力 将以上系数和自由项代入力法方程，得 $X_1 = \frac{(3P+2ql)l}{32}$

(5) 作内力图

① 根据叠加原理作弯矩图，如图(e)所示。

② 根据弯矩图和荷载作剪力图，如图(f)所示。



例 3. 作图(a)所示超静定刚架的内力图。已知刚架各杆 EI 均为常数。

解: (1) 选取基本结构 此结构为二次超静定刚架, 去掉 C 支座约束, 代之以相应的多余未知力 X_1 、 X_2 得如图(b)所示悬臂刚架作为基本结构。

(2) 建立力法方程 原结构 C 支座处无竖向位移和水平位移, 则其力法方程为

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

(3) 计算系数和自由项 分别作基本结构的荷载弯矩图 M_P 图和单位弯矩图 \overline{M}_1 图、 \overline{M}_2 图, 如图(c)、(d)、(e)所示。利用图乘法计算各系数和自由项分别为

$$\delta_{11} = \frac{4a^3}{3EI} \quad \delta_{22} = \frac{a^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{a^3}{2EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{5qa^4}{8EI} \quad \Delta_{2P} = -\frac{qa^4}{4EI}$$

(4) 求多余未知力

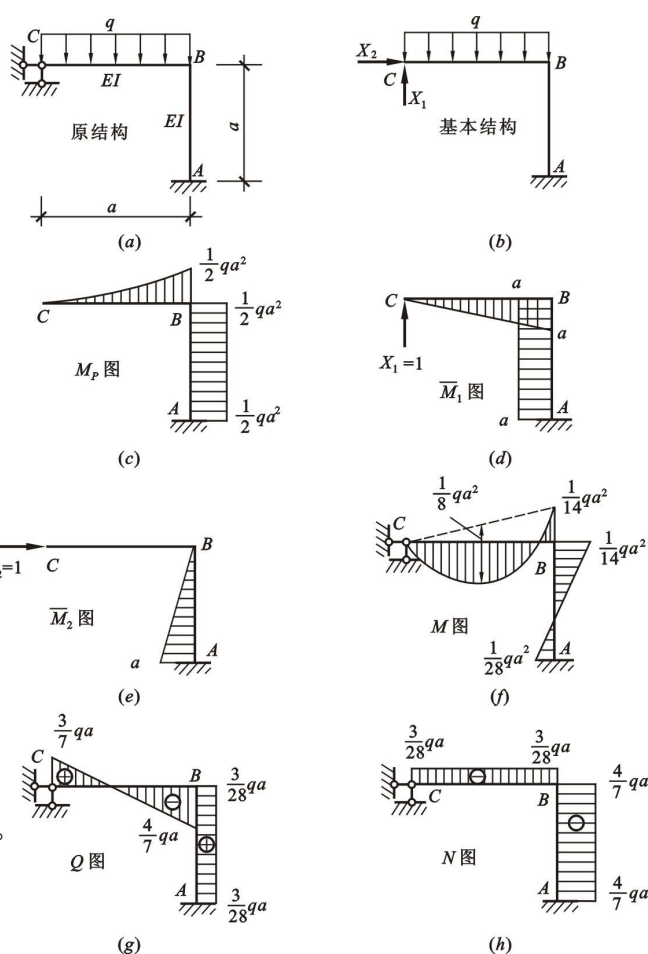
$$\frac{4a^3}{3EI}X_1 + \frac{a^3}{2EI}X_2 - \frac{5qa^4}{8EI} = 0$$

$$\frac{a^3}{2EI}X_1 + \frac{a^3}{3EI}X_2 - \frac{qa^4}{4EI} = 0$$

$$X_1 = \frac{3qa}{7}(\uparrow) \quad X_2 = \frac{3qa}{28}(\rightarrow)$$

(5) 作内力图

- ① 根据叠加原理作弯矩图, 如图(f)所示。
- ② 根据弯矩图和荷载作剪力图, 如图(g)所示。
- ③ 根据剪力图和荷载利用结点平衡作轴力图, 如图(h)所示。



例 4. 求图(a)所示超静定桁架各杆件的内力。已知各杆 EA 相同。

解: (1) 选取基本结构 此结构为一次超静定桁架, 切断下弦杆 EF 代之以相应的多余未知力 X_1 , 得到图(b)所示静定桁架作为基本结构。

(2) 建立力法方程 按照原结构变形连续的条件, 基本结构上与 X_1 相应的位移, 即切口两侧截面沿杆轴方向的相对位移应为零, 故力法方程为

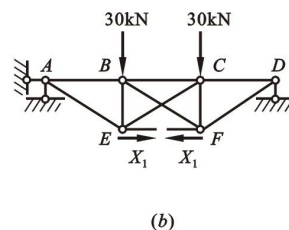
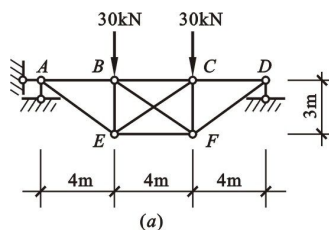
$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

(3) 计算系数和自由项 基本结构分别受单位力 $X_1=1$ 和荷载作用引起的各杆内力列入下表,

δ_{11} 、 Δ_{1P} 的计算也已在该表中示出。由表可得

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} \sum \overline{F_{N1}}^2 l = \frac{27}{EA}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EA} \sum F_{NP} \overline{F_{N1}} l = \frac{-1215}{EA}$$



杆件	\overline{N}_1	N_P (kN)	l (m)	$\overline{N}_1 N_P l$	$\overline{N}_1^2 l$	N (kN)
AE	0	50	5	0	0	50
AB	0	-40	4	0	0	-40
BE	0.75	-60	3	-135	1.6875	-26.25
BC	1	-80	4	-320	4	-35
BF	-1.25	50	5	-312.5	7.8125	-6.25
EF	1	0	4	0	4	45
CF	0.75	-60	3	-135	1.6875	-26.25
CD	0	-40	4	0	0	-40
DF	0	50	5	0	0	50
CE	-1.25	50	5	-312.5	7.8125	-6.25
Σ				-1215	27	

(4) 求多余未知力 将以上系数和自由项代入力法方程，得

$$\frac{27}{EA} X_1 - \frac{1215}{EA} = 0$$

$$X_1 = 45 \text{ kN}$$

(5) 计算各杆内力 根据叠加原理，各杆内力为 $F_N = \overline{F_{N1}} X_1 + F_{NP}$

由此式计算得到各杆轴力，结果列入表的最后一栏。

例 5. 计算图(a)所示排架柱的内力，并作出弯矩图。

解：(1) 选取基本结构 此排架是一次超静定结构，切断横梁代之以多余未知力 X_1 得到基本结构如图(b)所示。

(2) 建立力法方程

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

(3) 计算系数和自由项 分别作基本结构的荷载弯矩图 M_P 图和单位弯矩图 \overline{M}_1 图如图(c)、

(d) 所示。利用图乘法计算系数和自由项分别如下

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{2}{3} \times 2 + \frac{2}{3EI} \left[\frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \left(\frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 8 \right) + \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \left(\frac{2}{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times 2 \right) \right] = \frac{352}{3EI}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 20 \times \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3EI} \left[\frac{1}{2} \times 6 \times 20 \times \left(\frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 8 \right) + \frac{1}{2} \times 6 \times 80 \times \left(\frac{2}{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times 2 \right) \right] = \frac{1760}{3EI}$$

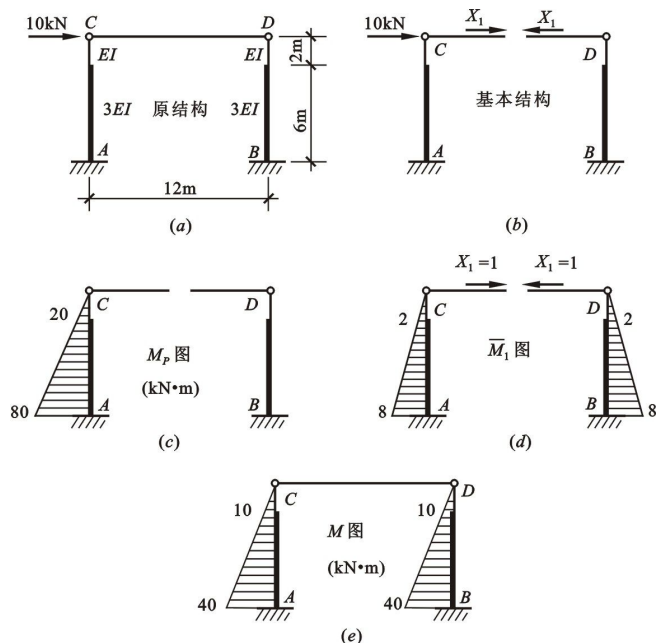
(4) 计算多余未知力 将系数和自由项代入力法方程，得

$$\frac{352}{3EI}X_1 + \frac{1760}{3EI} = 0$$

解得 $X_1 = -5\text{kN}$

(5) 作弯矩图

最后弯矩图如图(e)所示。



§ 6-6 超静定结构的位移计算

一、力法计算的实质

用力法计算超静定结构，是根据基本结构在荷载作用和全部多余未知力共同作用下内力和位移应与原结构完全一致这个条件来进行的。也就是说，在荷载及多余未知力共同作用下的基本结构与在荷载作用下的原超静定结构是完全相同的。

二、超静定结构的位移计算

计算超静定结构的位移时可以用原超静定结构已经求出的弯矩图与静定的基本结构的单位荷载弯矩图用图乘法求位移，具体步骤是：

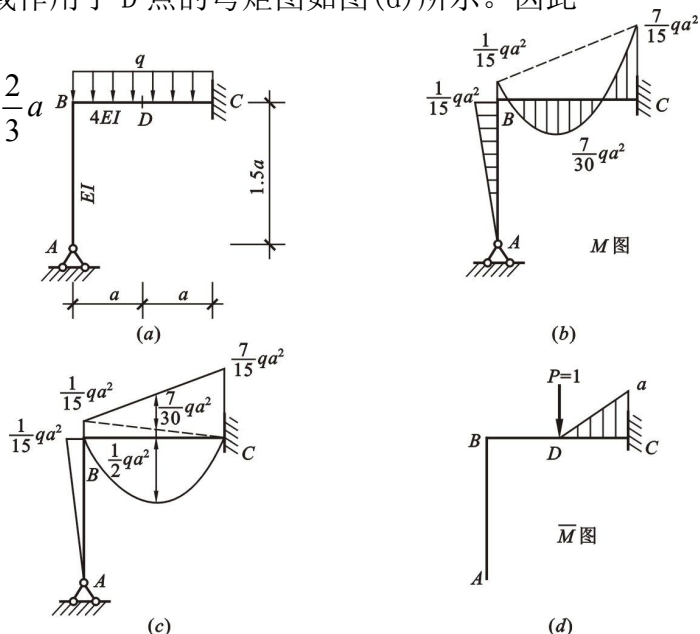
1. 绘出原超静定结构的弯矩图(即 M_p 图)；
2. 选择一个最简单的基本结构作为虚拟状态，并绘出相应的弯矩图(即 \bar{M} 图)；
3. 按图乘法求位移。

例 6. 试求图(a)所示超静定刚架横梁 BC 中点 D 的竖向位移 Δ_{DV} 。

解：绘出刚架的弯矩图如图(b)所示，再将此图改成易于图乘的简单的图形组合，如图(c)所示。

采用悬臂刚架作为基本结构，并绘出单位荷载作用于 D 点的弯矩图如图(d)所示。因此

$$\begin{aligned}\Delta_{DV} &= \frac{1}{4EI} \left(-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times qa^2 \times a \times \frac{3}{8}a + \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} qa^2 \times a \times \frac{2}{3}a \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \times \frac{8}{30} qa^2 \times a \times \frac{1}{3}a \right) \\ &= \frac{3qa^4}{160EI} (\downarrow)\end{aligned}$$



§ 6-7 超静定结构内力图的校核

校核应当从两方面进行，一是静力平衡条件的校核，二是位移条件的校核。

一、静力平衡条件的校核

取结构的整体或取其中的任何局部作为隔离体考察其受力是否满足静力平衡条件。如不满足，则说明计算有误。现举例如下：

例 7. 对例 19.3 所示结构进行静力平衡条件的校核。

解：对于例 19.3 所示刚架，取立柱顶端的 BC 杆以及 AB 杆绘出其受力图，如图(a)、(b)所示。

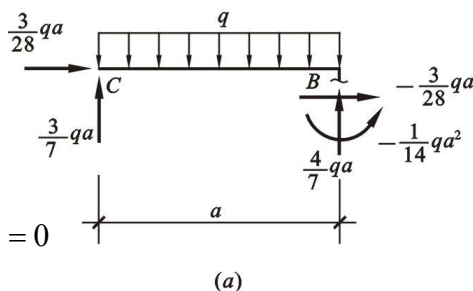
现校核此两杆是否满足静力平衡条件。

(1) BC 杆：

$$\sum X = \frac{3}{28}qa - \frac{3}{28}qa = 0$$

$$\sum Y = \frac{3}{7}qa - qa + \frac{4}{7}qa = 0$$

$$\sum M_B = -\frac{3}{7}qa \times a + qa \times \frac{a}{2} - \frac{1}{14}qa^2 = 0$$

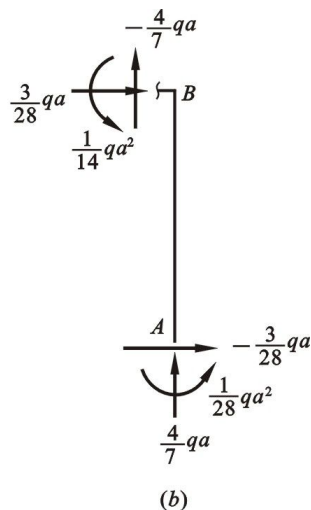


(2) AB 杆：

$$\sum X = \frac{3}{28}qa - \frac{3}{28}qa = 0$$

$$\sum Y = -\frac{4}{7}qa + \frac{4}{7}qa = 0$$

$$\sum M_B = -\frac{3}{28}qa \times a + \frac{1}{14}qa^2 + \frac{1}{28}qa^2 = 0$$



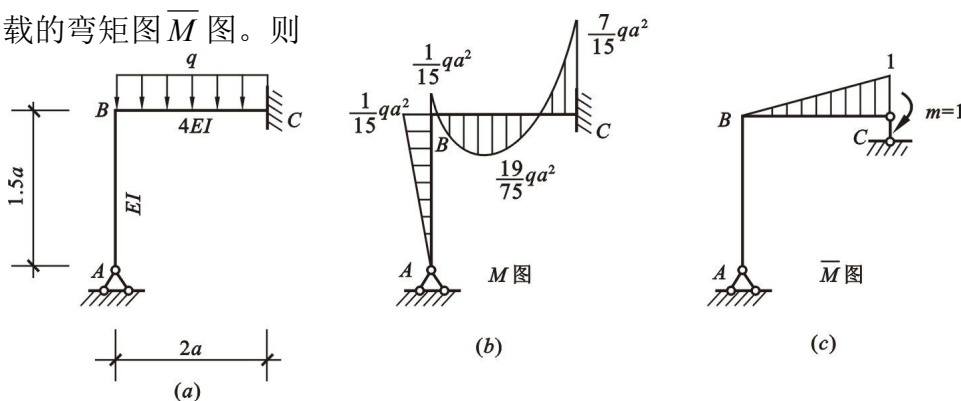
以上都满足静力平衡条件。

例 8. 对例 6 所示刚架进行位移条件的校核。

解：绘出刚架受力图及弯矩图如图(a)、(b)所示。

原结构在 C 截面没有角位移。现在来求 C 截面的角位移 φ_C 。取基本结构如图(c)所示，

并绘出单位荷载的弯矩图 \bar{M} 图。则



$$\begin{aligned} \varphi_C &= \frac{1}{4EI} \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{15} qa^2 \times 2a \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{15} qa^2 \times 2a \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 2a \times \frac{1}{2} qa^2 \times \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4EI} \left(\frac{1}{45} qa^3 + \frac{14}{45} qa^3 - \frac{1}{3} qa^3 \right) = 0 \end{aligned}$$

证明满足位移条件。

§ 6-8 对称性的利用

一、对称性的特点

1. 结构对称

(1) 结构的几何形状和支承情况对称于某一几何轴线；

(2) 杆件截面形状、尺寸和材料的物理性质(弹性模量等)也关于此轴对称。

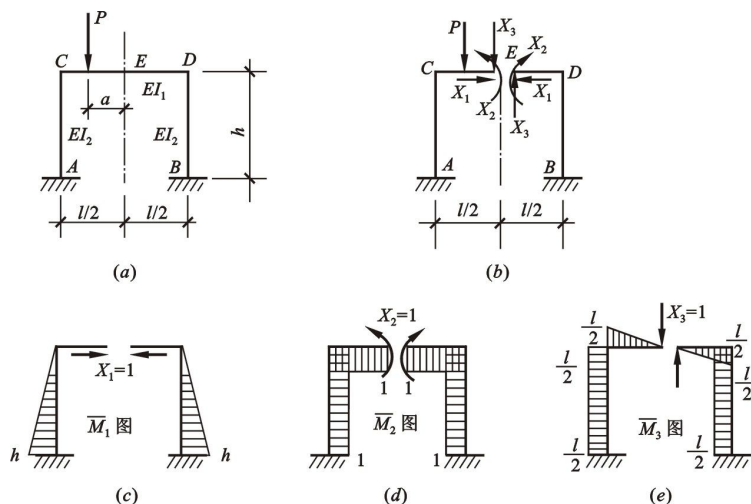
若将结构沿这个轴对折后，结构在轴线的两边部分将完全重合，该轴线称为结构的对称轴。

2. 荷载对称： 任意荷载 = 正对称荷载 + 反对称荷载

二、利用对称性简化计算要点

1. 选用对称的基本结构——沿对称轴切开建立基本结构，得到正对称和反对称多余未知力。

图(a)所示为三次超静定刚架，建立图(b)所示基本结构，作单位弯矩图如图(c)、(d)、(e)所示。由图可见，正对称多余未知力的单位弯矩图 M_1 和 M_2 是**正对称**的，而反对称多余未知力的单位弯矩图 M_3 是**反对称**的。



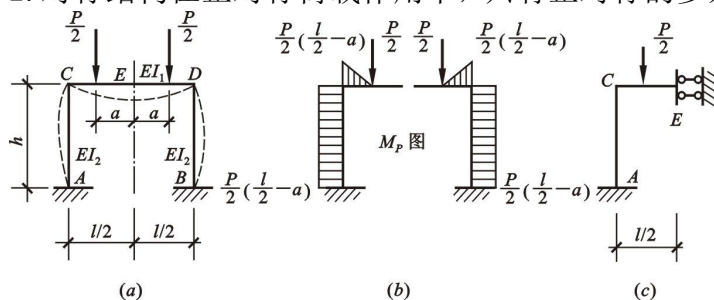
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0$$

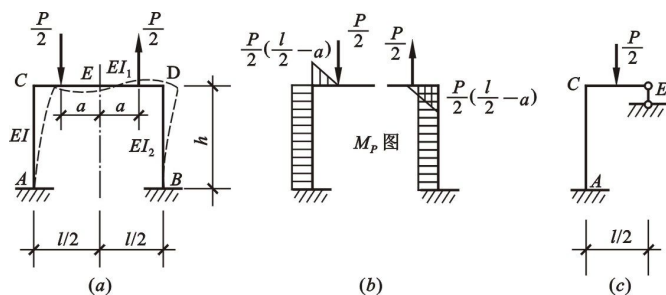
$$\text{其中 } \delta_{31} = \delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

2. 对称结构在正对称荷载作用下，只有正对称的多余未知力存在，而反对称多余未知力为零。



$$\Delta_{3P} = 0 \Rightarrow X_3 = 0$$

3. 对称结构在反对称荷载作用下，只有反对称的多余未知力存在，而正对称多余未知力为零。



$$\Delta_{1P} = \Delta_{2P} = 0 \Rightarrow X_1 = X_2 = 0$$

例 1. 利用对称性作图(a)所示单跨超静定梁的内力图。梁的 EI 为常数。

解: (1) 取半结构及其基本结构 由于结构和荷载均对称, 可从跨中截面 C 处切开, 加滑动支座取半结构如图(b)所示。又由于两端固定的梁, 在垂直于梁轴的荷载作用下, 轴向力为零。于是得到图(c)所示基本结构。

(2) 建立力法方程 由图(b)所示半结构可见, C 支座处无转角, 据该位移条件可建立力法方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

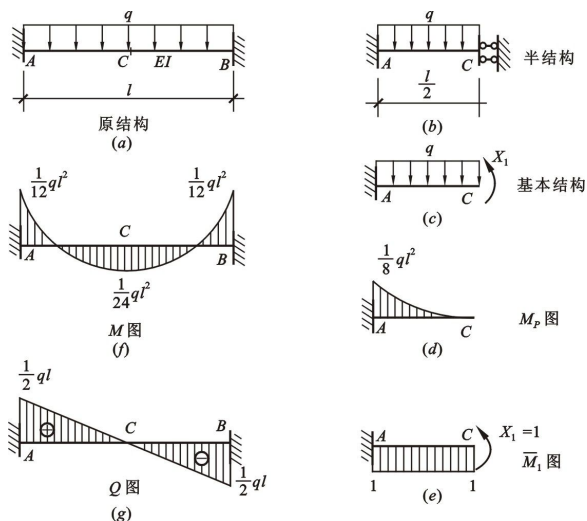
(3) 计算系数和自由项

$$\delta_{11} = \frac{l}{2EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{8} ql^2 \times 1 \right) = -\frac{ql^3}{48EI}$$

(4) 求多余未知力 $X_1 = \frac{ql^2}{24}$

(5) 作内力图



例 2. 试计算图(a)所示刚架, 并绘出内力图。

解: (1) 选取基本结构 此结构是三次超静定对称刚架, 取对称形式基本结构如图(b)所示, X_1 、 X_2 为对称多余未知力, X_3 为反对称多余未知力。

(2) 建立力法方程 根据前面分析, 力法方程将分为两组, 即

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0$$

(3) 计算系数和自由项

$$\delta_{11} = \frac{72}{EI} \quad \delta_{22} = \frac{8}{EI} \quad \delta_{33} = \frac{60}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{18}{EI} \quad \Delta_{1P} = -\frac{486}{EI}$$

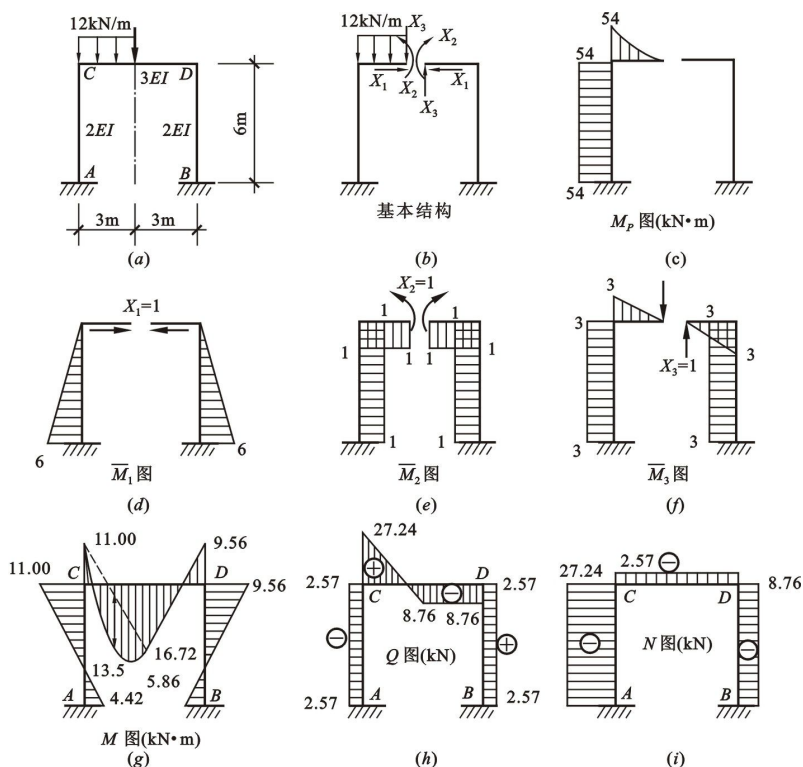
$$\Delta_{2P} = -\frac{180}{EI} \quad \Delta_{3P} = \frac{526.5}{EI}$$

(4) 求多余未知力

$$X_1 = 2.57 \text{ kN}, \quad X_2 = 16.72 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad X_3 = -8.78 \text{ kN}$$

(5) 作内力图

最后弯矩图如图(g)所示, 剪力图和轴力图分别如图(h)、(i)所示。



例 3. 作图(a)所示三次超静定刚架的弯矩图。已知各杆 EI 均为常数。

解: (1) 取半结构及其基本结构

① 分解荷载简化计算, 首先将图(a)所示荷载分解为对称荷载和反对称荷载的叠加, 分别如图(b)、(c)所示。

② 取半刚架由于图(c)是对称结构在反对称荷载作用下, 故从对称轴截面切开, 应加可动铰支座得半结构如图(d)所示。

③ 选取基本结构半刚架为一次超静定结构, 去掉可动铰支座并代之以多余未知力 X_1 得图(e)所示悬臂刚架作为基本结构。

(2) 建立力法方程

由图(d)所示半结构可见, E 支座处无竖向位移, 于是可得力法方程为

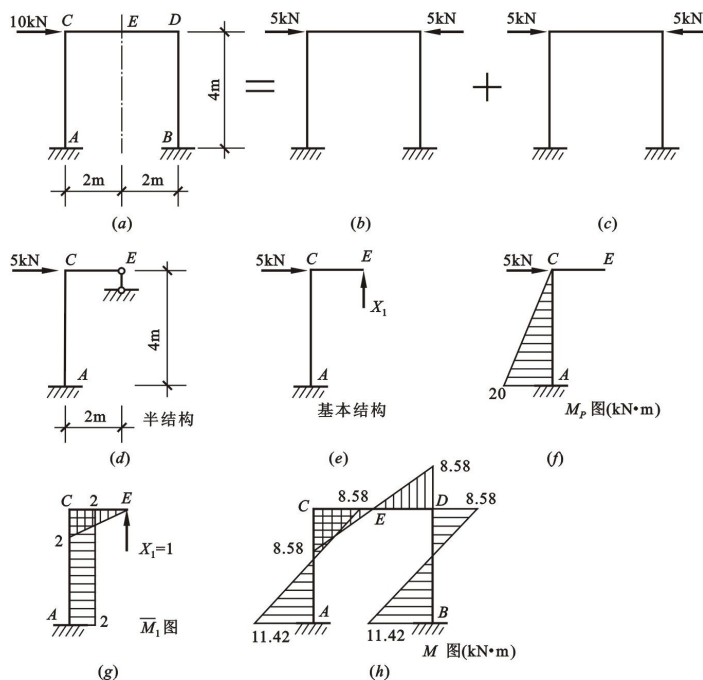
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

(3) 计算系数和自由项 $\delta_{11} = \frac{56}{3EI}$ $\Delta_{1P} = -\frac{80}{EI}$

(4) 计算多余未知力 $X_1 = 4.29 \text{ kN}$

(5) 作弯矩图

据叠加原理作 ACE 半刚架弯矩图, 如图(h)所示, 其中 BDE 半刚架弯矩图根据反对称荷载作用下弯矩图应是反对称的关系得出。



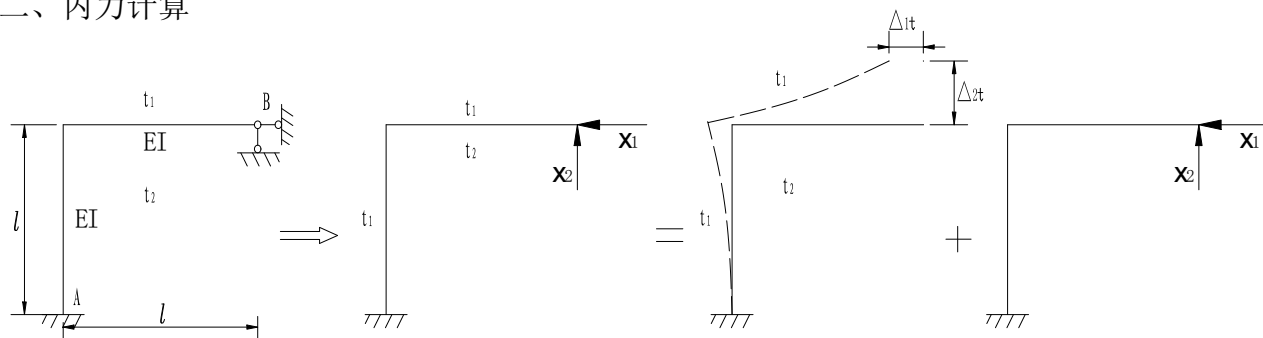
§ 6-9 温度改变时超静定结构的计算

一、温度变化对结构的影响

1. 静定结构——材料热胀冷缩引起结构产生变形和位移, 但不产生内力。

2. 超静定结构——材料热胀冷缩引起结构产生变形和位移, 同时产生反力和内力。

二、内力计算



$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1t} = 0$$

其中 Δ_{it} ——由温度变化引起基本结构沿 X_i 方向产生的位移

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2t} = 0$$

$$\Delta_{it} = \pm \sum \alpha t_0 \bar{F}_N l \pm \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \omega_{\bar{M}}$$

最后弯矩值 $M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2$ (温度变化对基本结构不产生内力)

三、位移计算

计算温度变化时超静定结构的位移，等同于求基本结构在内力和温度变化两种情况下产生位移的代数和，即用原超静定结构已经求出的弯矩图与静定的基本结构的单位荷载弯矩图用图乘法求内力产生的位移，并求出静定的基本结构由温度变化所产生的位移。具体步骤是：

1. 绘出原超静定结构的弯矩图(即 M_p 图)；
2. 选择一个最简单的基本结构作为虚拟状态，并绘出相应的单位弯矩图(即 \overline{M} 图)和单位轴力图(即 $\overline{F_N}$ 图)；
3. 按图乘法求内力(弯矩)所产生的位移，用 $\Delta = \pm \sum \alpha t_0 \overline{F_N} l \pm \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \omega_{\overline{M}}$ 求温度变化所产生的同一截面位移。

例 6.10 P158

§ 6-10 支座移动时超静定结构的计算

一、支座移动对结构的影响

1. 静定对称——产生刚体位移，没有变形，也不产生内力。
2. 超静定结构——结构产生变形和位移，同时产生反力和内力。

二、内力计算

基本原理和解题步骤与荷载作用、温度变化的情况相同，只是力法方程中自由项的计算有所不同，它表示基本结构由于支座移动在多余约束处沿多余未知力 X_i 方向所引起的位移 Δ_{iC} ，可用 4.6 节所述方法求得。

另外还应注意力法方程等号右侧为基本结构在拆除约束处沿多余未知力 X_i 方向的位移条件，也就是原结构在多余未知力 X_i 方向的已知实际位移值 Δ_i ，当 Δ_i 与多余未知力方向一致时取正值，否则取负值。

例 1. 图(a)所示超静定梁，设支座 A 发生转角 θ ，求作梁的弯矩图。已知梁的 EI 为常数。

解：(1) 选取基本结构 原结构为一次超静定梁，选取图(b)所示悬臂梁为基本结构。

(2) 建立力法方程 原结构在 B 处无竖向位移，可建立力法方程如下

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1C} = 0$$

(3) 计算系数和自由项 作单位弯矩图 M_1 如图(c)所示，可由图乘法求得

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} \quad \Delta_{1C} = -\sum \overline{R}_i C_i = -(l \times \theta) = -l\theta$$

(4) 求多余未知力 将 δ_{11} 、 Δ_{1C} 代入力法方程得

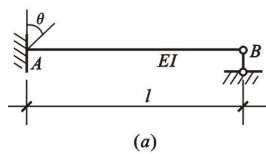
$$\frac{l^3}{3EI} X_1 - l\theta = 0$$
$$X_1 = \frac{3EI\theta}{l^2}$$

(5) 作弯矩图 由于支座移动在静定的基本结构中不引起内力, 故 $M = \overline{M}_1 X_1$

$$M = \overline{M}_1 X_1$$

$$M_{AB} = l \times \frac{3EI\theta}{l^2} = \frac{3EI\theta}{l}$$

$$M_{BA} = 0$$

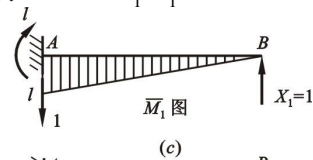


(a)



基本结构

(b)



(c)



M 图

(d)

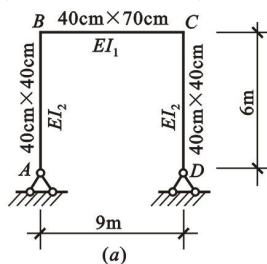
例 2. 图(a)所示为一次超静定刚架, 梁、柱截面尺寸如图(a)所注。E=20GPa。已知支座 D 的移动分别为 $\Delta_{DH} = 8\text{cm}$, $\Delta_{DV} = 4\text{cm}$ 。试计算刚架由此而引起的内力, 并画出内力图。

解: (1) 取支座 A 的水平反力为多余未知力, 则力法方程为:

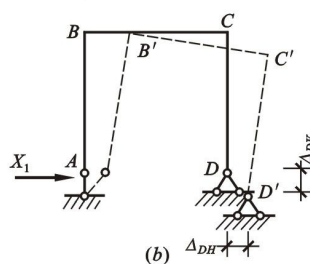
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1C} = 0$$

(2) 求系数和自由项

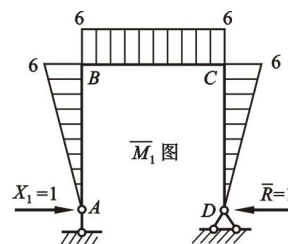
$$\delta_{11} = \frac{324}{EI_1} + \frac{144}{EI_2}$$



(a)



(b)



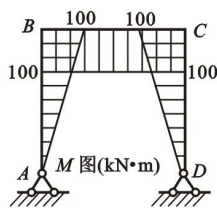
(c)

$$\Delta_{1C} = -(-1 \times 8)$$

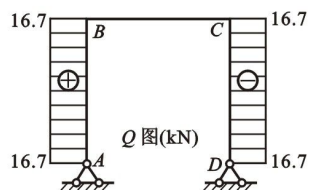
$$= 8\text{cm} = 0.08\text{m}$$

(3) 求多余未知力

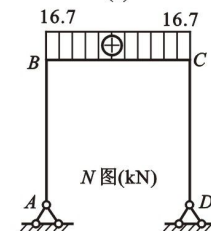
将 δ_{11} 、 Δ_{1C} 代入方程得



(d)



(e)



(f)

$$\left(\frac{324}{EI_1} + \frac{144}{EI_2}\right) X_1 + 0.08 = 0, X_1 = \frac{0.08}{\frac{324}{EI_1} + \frac{144}{EI_2}}$$

由 X_1 的计算式可见, 在支座移动的情况下, 多余未知力与刚架抗弯刚度的绝对值有关。

代入已知数据可得

$$X_1 = -16.7\text{kN}$$

(4) 作内力图 由 $M = \overline{M}_1 X_1$ 可绘出弯矩图, 进而绘出剪力图、轴力图。

§ 6-11 超静定结构的特性

与静定结构相比较, 超静定结构具有以下特性:

1. 超静定结构具有多余联系 (约束), 具有更强的防护能力;
2. 超静定结构的内力和变形分布比较均匀, 峰值较小, 具有更高的刚度, 使截面设计更经济;
3. 在超静定结构中, 由于温度变化、支座移动、支座误差、材料收缩等因素均可引起内力, 但荷载作用下的内力仅与各杆的相对刚度有关, 而温度变化、支座移动时的内力与各杆的绝对刚度有关, 因此, 为了提高结构抵抗温度变化、支座移动的能力, 依靠增大截面尺寸并不是有效措施。

第七章 位移法

§ 7-1 位移法的基本概念

一、位移法与力法的区别

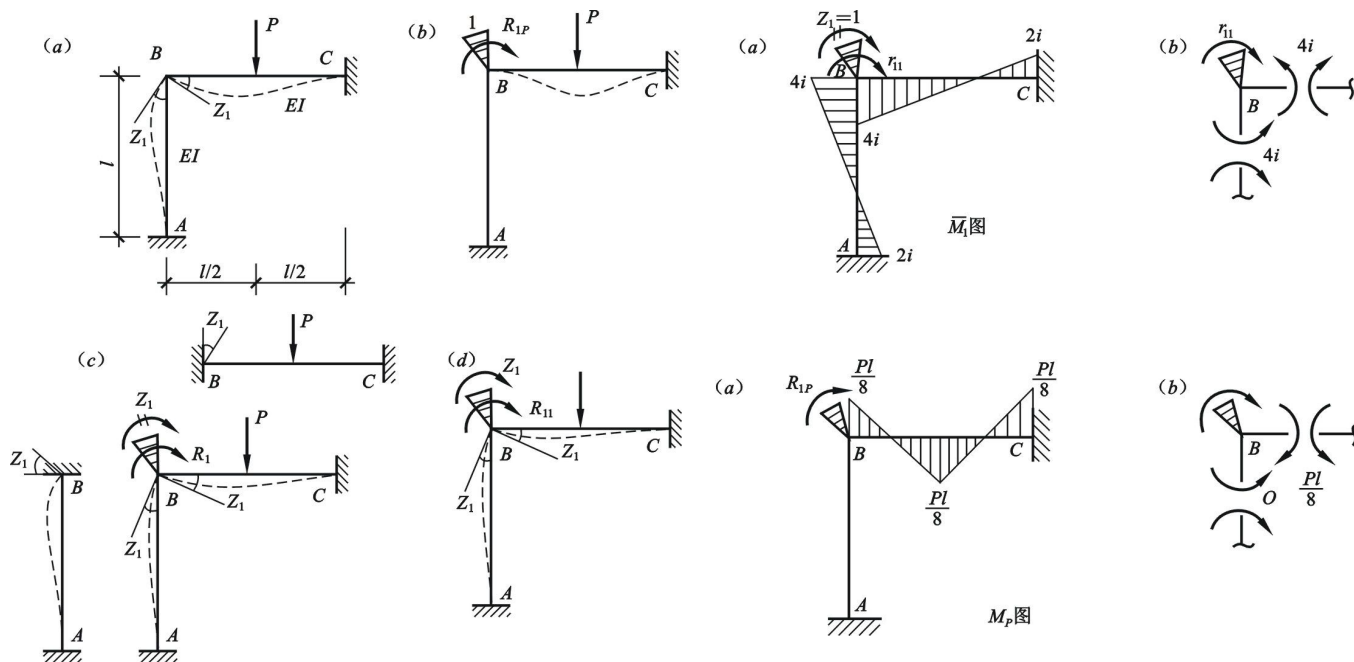
1. 主要区别是基本未知量不同：力法是取结构中的**多余未知力**作为基本未知量；位移法是以**结点位移**(线位移和角位移)作为基本未知量。
2. 建立的基本方程不同：力法是由变形协调条件建立**位移**方程；位移法是由平衡条件建立的**平衡**方程。

注：力法的基本未知量的数目等于超静定次数，而位移法的基本未知量与超静定次数无关。

二、位移法的基本假定

1. 刚结点所连接各杆端截面变形后有相同的角位移；
2. 各杆端之间的连线长度变形前后保持不变，即忽略杆件的轴向变形；
3. 结点线位移的弧线运动用垂直于杆轴的切线代替，及结点线位移垂直于杆轴发生。

三、位移法的解题思路



1. 确定基本未知量为 B 结点角位移 Z_1 ，在 B 点增加附加刚臂，建立基本结构。
附加刚臂的作用——限制结点转动，但不限制移动
2. 增加附加刚臂后，B 点角位移为零，基本结构可看作两个单跨超静定梁的组合体，先求出基本结构单独在荷载作用下的内力；
3. 放松附加刚臂，使 B 结点产生角位移 Z_1 ，求出基本结构单独在 Z_1 作用下的内力；
4. 叠加以上两步，使结点平衡，即得位移法方程；
5. 解方程求出基本未知量，并求出各杆内力，绘制内力图。

注：杆端内力正负号规定

- (1) 杆端弯矩对杆端以顺时针转动为正，逆时针为负；对支座和结点而言，以逆时针为正；
- (2) 杆端剪力以使杆件顺时针转动为正。

§ 7-2 位移法的基本未知量与基本结构

一、基本未知量的确定

1. 结点角位移的确定：结点角位移的数目 = 刚结点的数目

2. 独立的结点线位移的确定

(1) 对于简单的结点线位移，可观察判断确定。

(2) 对于复杂刚架结点线位移，可以用铰结体系自由度来确定，即把刚结点都改为铰结点，固定端支座都改为铰支座，所得体系的自由度数为独立结点线位移的数目。

注意：I. “铰化体系法”不适用于具有支杆平行于杆轴的可动铰支座或滑动支座的刚架，也不适用于含有自由端杆件的情况。

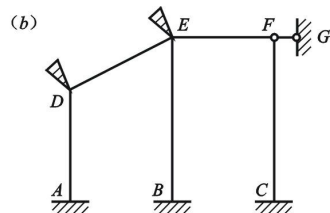
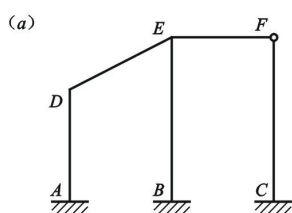
II. $W > 0$ 时， W 的数目即为独立的结点线位移数目； $W = 0$ 时，若体系几何不变，则无结点线位移，若体系几何可变（瞬变），可以通过增加链杆使其几何不变，所需增加的链杆就是原结构独立的结点线位移。

(3) 附加链杆法：在结点处增加附加链杆以阻止全部可能发生的线位移所需的最少链杆数即为独立的结点线位移。

二、位移法的基本结构

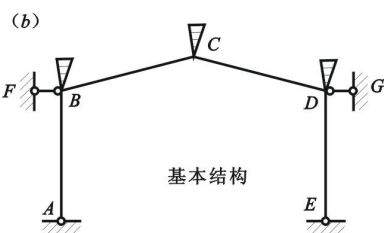
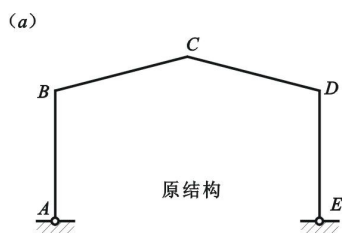
1. 位移法的基本结构——是若干个单跨超静定梁组成的。

2. 基本结构的建立——在产生角位移的刚结点处增加附加刚臂阻止结点转动，在产生线位移的结点处增加附加链杆阻止其线位移，得到单跨超静定梁的组合体即为位移法的基本结构。

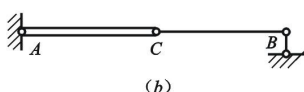
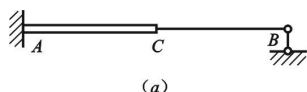


在结点 F 加一个附加支杆，这时结点 F 不能移动。F、B 二结点不移动，结点 E 也就不移动了。E、A 二结点不移动，结点 D 也就不移动了。

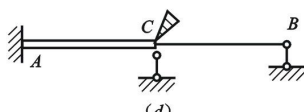
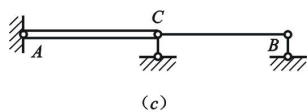
可见，只要加一个支杆，一排结点就都不移动了，不管梁是水平的，还是斜的。



化为铰结体系（未画出）不难看出，需加入两根附加支杆才能使其形成几何不变体系。



该结构为一阶形梁，若用位移法计算，应将变截面处取为一个结点。



铰结体系如图 (b) 所示，容易看出结点 C 能上下移动，需加入一附加支杆（图 (c)）。此外，还应在结点 C 处加入一附加刚臂。

§ 7-3 等截面直杆的计算

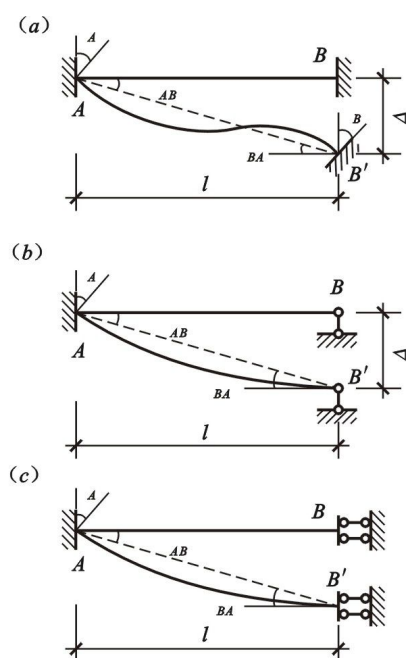
位移法的基本结构是单跨超静定梁的组合物，单跨超静定梁是位移法的计算单元。

一、固端力（杆端力与荷载之间的关系）

1. 概念——由荷载作用产生的杆端力叫固端力，包括固端弯矩和固端剪力，是只与荷载的形式有关的常数，故又叫**载常数**，可由力法计算求得，见表 7.1。
2. 正负号规定——弯矩和剪力均以使杆端顺时针转动为正。

二、刚度方程（杆端力与杆端位移之间的关系）

1. 概念——杆端力与杆端位移之间的关系式称为杆件的刚度方程。
2. 推导



图(a)所示两端固定梁 AB，A、B 端分别发生转角 φ_A 、 φ_B ，两端产生垂直于梁轴的相对侧移 Δ ，其中 AB' 与水平方向的夹角称为弦转角，用 φ_{AB} 或 φ_{BA} 表示。

以上各种位移的正、负号规定为：杆端转角 φ_A 、 φ_B 以及弦转角都以顺时针转角为正；线位移 Δ 的正、负号应与弦转角 φ_{AB} 一致，即右端下沉、左端上升为正。图中所画各种位移均为正。

对于图(a)所示两端固定梁：

$$M_{AB} = 4i\varphi_A + 2i\varphi_B - 6i\frac{\Delta}{l}, \quad M_{BA} = 2i\varphi_A + 4i\varphi_B - 6i\frac{\Delta}{l}$$

对于图(b)一端固定另一端铰支梁：

$$M_{AB} = 3i\varphi_A - 3i\frac{\Delta}{l}, \quad M_{BA} = 0$$

对于图(c)一端固定另一端定向支承梁，其刚度方程为： $M_{AB} = i\varphi_A$ ， $M_{BA} = -i\varphi_A$

3. 刚度系数——刚度方程中杆端位移的系数称为刚度系数，是只与杆件的几何尺寸和材料性质有关的常数，故又叫**形常数**，见表 7.1。

三、转角位移方程

1. 概念——在位移法计算过程中，需要建立各等截面直杆的杆端力(杆端弯矩和杆端剪力)与杆端位移、杆上荷载的关系式，通常称这种关系式为转角位移方程。
2. 表达式：转角位移方程 = 刚度方程 + 固端力

§ 7-4 位移法典型方程

一、位移法求解超静定结构的两种方法

1. 直接平衡法：确定结点位移未知量后，由表 7.1 写出各杆的杆端转角位移方程，再列出平衡方程求解。
2. 基本体系法：确定结点位移未知量后，由表 7.1 作出基本结构的单位弯矩图和荷载作用下的弯矩图，由此求得系数和常数项，再列出位移法典型方程求解。

二、位移法用典型方程求解的步骤

1. 确定基本未知量，建立基本结构；

2. 建立位移法典型方程 $R_1 = 0 \Rightarrow r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \cdots r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0$

$$R_2 = 0 \Rightarrow r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \cdots r_{2n}Z_n + R_{2P} = 0$$

$$R_n = 0 \Rightarrow r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \cdots r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0$$

3. 求系数和自由项；

4. 解方程求未知量；

5. 绘制内力图及校核。

§ 7-5 用位移法计算连续梁和无侧移刚架

例 1. 求图(a)所示连续梁的弯矩图。

解：(1) 确定基本未知量，建立基本结构。

结构有两个刚结点 B 和 C，无结点线位移。其位移法基本结构如图(b)所示。

(2) 建立位移法典型方程

基本结构受荷载及结点转角 Z_1 、 Z_2 共同作用，根据基本结构附加刚臂上的反力矩等于零这一条件，按叠加法可建立位移法典型方程如下：

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

(3) 求系数和自由项

$$r_{11} = 4i + 6i = 10i, \quad r_{12} = r_{21} = 3i$$

$$r_{22} = 6i + 3i = 9i$$

$$R_{1P} = 20 - 80 = -60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

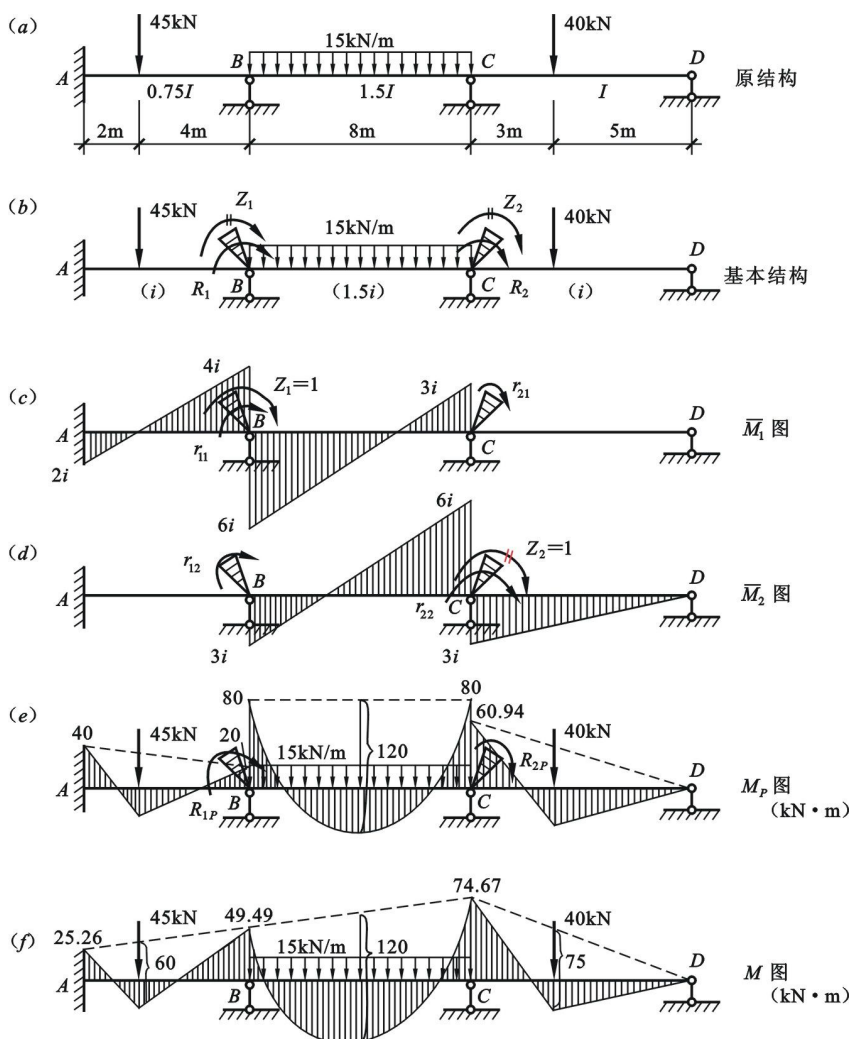
$$R_{2P} = 80 - 60.94 = 19.06 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(4) 代入方程求未知量

$$Z_1 = 7.37/i, \quad Z_2 = -4.57/i$$

(5) 绘制弯矩图

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + M_P$$



例 2. 用位移法计算图(a)所示结构，并作内力图。已知各杆 EI 为常数。

解：(1) 在结点 B 加一刚臂得基本结构(图(b))，只有一个未知量 Z_1 。

(2) 位移法典型方程为

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

(3) 求系数和自由项

$$r_{11} = 4i + 3i = 7i$$

$$R_{1P} = 5 - 40 = -35 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

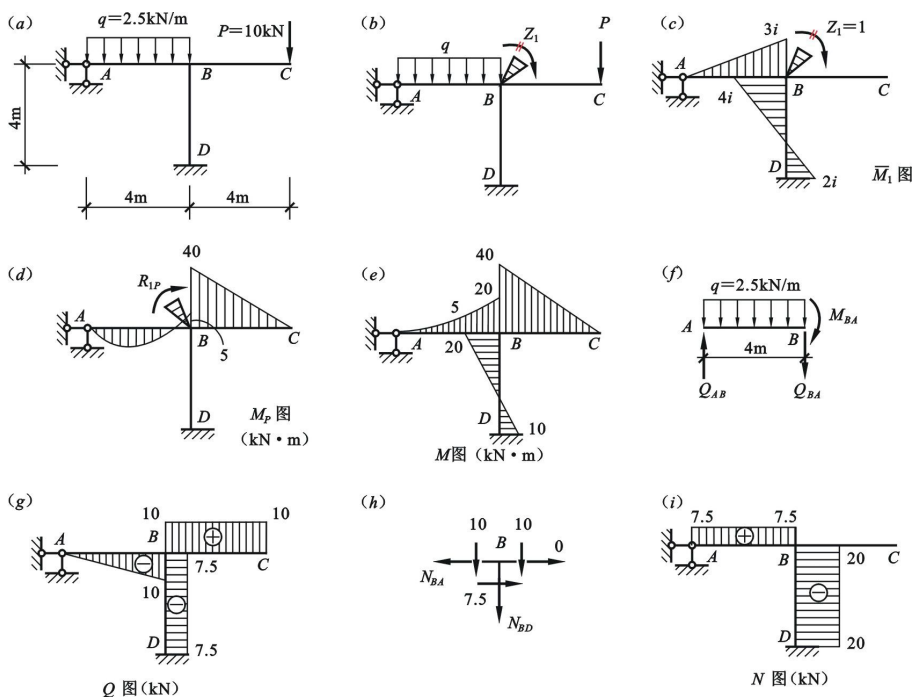
(4) 代入方程求未知量

$$Z_1 = 5/i$$

(5) 绘制弯矩图

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + M_P$$

(6) 利用弯矩图绘制剪力图和轴力图



例 3. 用位移法计算图(a)所示结构，并作弯矩图。已知各杆长度均为 l ，EI 为常数。

解：(1) 基本结构如图(b)所示。

(2) 位移法方程为

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

(3) 求系数和自由项

$$r_{11} = 4i + 3i + 4i = 11i$$

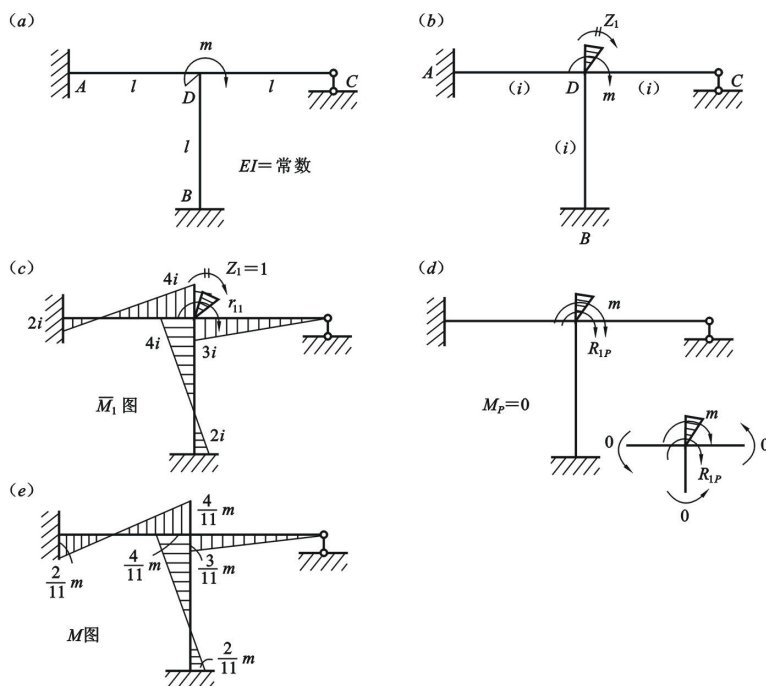
如图(d)所示，结点 D 被刚臂锁住，加外力偶后不能转动，所以各杆均无弯曲变形，因此无弯矩图，即 $M_P = 0$ 。

$$R_{1P} = -m$$

(4) 代入方程求未知量

$$Z_1 = m / 11i$$

(5) 绘制弯矩图 $M = \overline{M}_1 Z_1 + M_P$



注：I. 当结点只受外力偶作用时， $R_{1P} = m$ ，且外力偶为顺时针时 m 取负号，逆时针时 m 取正号。

II. 当结点上除受外力偶作用外, 各杆上还有外力作用时, $R_{1P} = \sum M_{\text{固端}} + m$, 外力偶为

顺时针时, m 取负号; 反之, m 取正号。

例 4. 绘图 (a) 所示结构的弯矩图。EI=常数。

解: (1) 基本结构如图 (b) 所示。

由于超静定结构的内力只与各杆的刚度比值有关, 而与刚度绝对值大小无关。因此, 求内力时刚度大小可以任意给定, 只要保持其比值不变即可。这里为了简单, 设 EI=1, 求得各杆的线刚度如图 (b) 括号中数字所示。

(2) 位移法方程为

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

(3) 求系数和自由项

$$r_{11} = 0.8 + 1 = 1.8$$

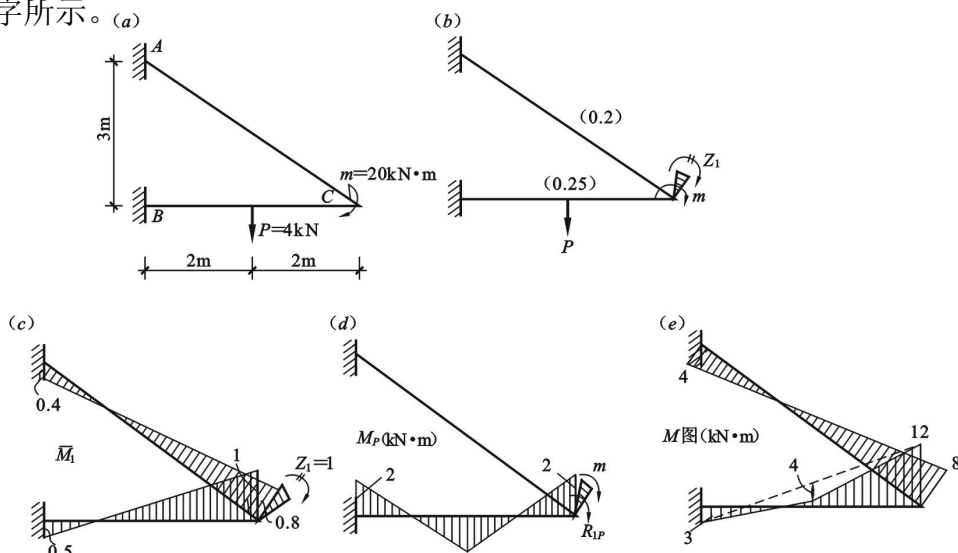
$$R_{1P} = \sum M_{\text{固端}} + m$$

$$= 2 - 20 = -18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(4) 代入方程求未知量

$$Z_1 = 10$$

(5) 绘制弯矩图



例 5. 用位移法计算图 (a) 所示刚架, 并绘 M 图。

解: (1) 此刚架具有两个刚结点 B 和 C, 无结点线位移, 其基本结构如图 (b) 所示。

(2) 列位移法典型方程:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

(3) 求各系数和自由项

$$r_{11} = 4i + 8i = 12i, \quad r_{12} = r_{21} = 4i$$

$$r_{22} = 6i + 4i + 8i = 18i$$

$$R_{1P} = -10 - 26.67 = -36.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

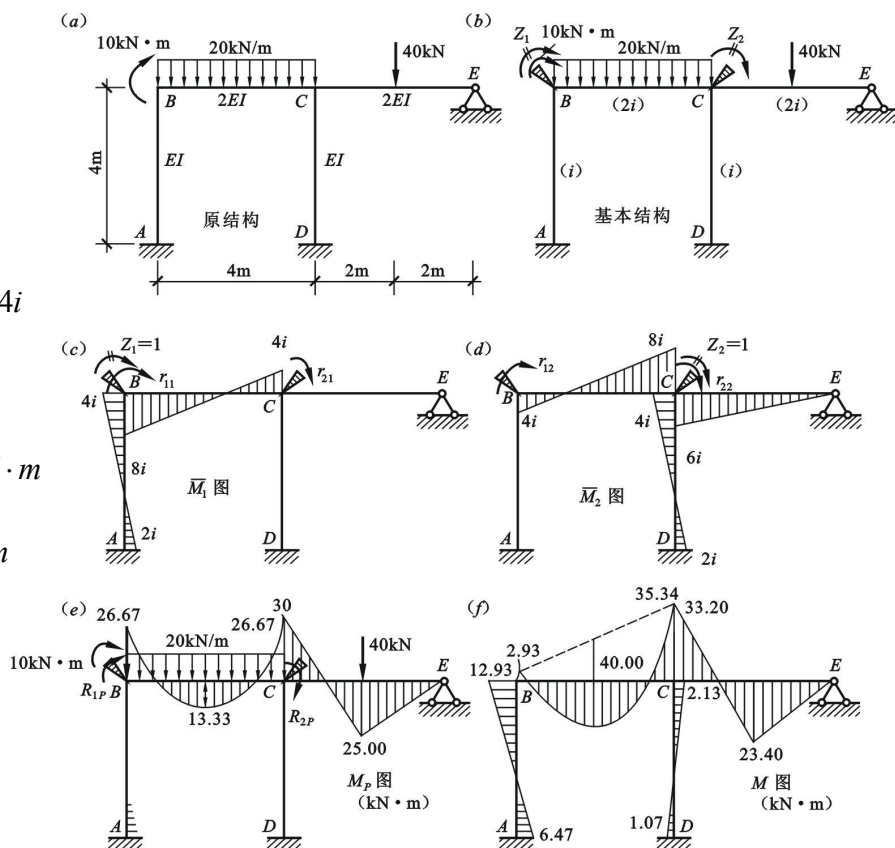
$$R_{2P} = 26.67 - 30 = -3.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(4) 代入方程求未知量

$$Z_1 = 3.23/i, \quad Z_2 = -0.53/i$$

(5) 绘制弯矩图

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + M_P$$



§ 7-6 用位移法计算有侧移刚架

例 1. 求图(a)所示铰接排架的弯矩图。

解: (1) 只需加一附加支杆, 得基本结构如图(b)所示, 有一个基本未知量 Z_1 。

(2) 位移法方程为 $r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$

(3) 求系数和自由项

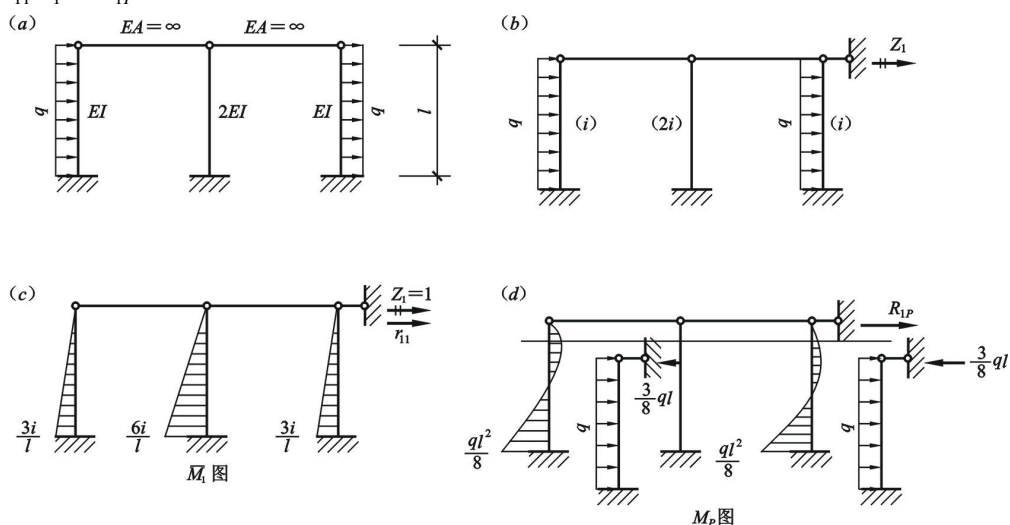
$$r_{11} = \sum \frac{3i}{l^2} = \frac{12i}{l^2}$$

$$R_{1P} = -\frac{3}{4}ql$$

(4) 代入方程求未知量

$$Z_1 = \frac{ql^3}{16i}$$

(5) 绘制弯矩图



例 2. 用位移法计算图(a)所示刚架, 并绘 M 图

解: (1) 此刚架具有一个独立转角 Z_1 和一个独立线位移 Z_2 。在结点 C 加入一个附加刚臂和附加支杆, 便得到图(b)所示的基本结构。

(2) 建立位移法方程

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

(3) 求各系数和自由项

$$r_{11} = 4i + 3i = 7i,$$

$$r_{12} = r_{21} = -1.5i$$

$$r_{22} = \frac{12i}{4^2} + \frac{3i}{4^2} = \frac{15i}{16}$$

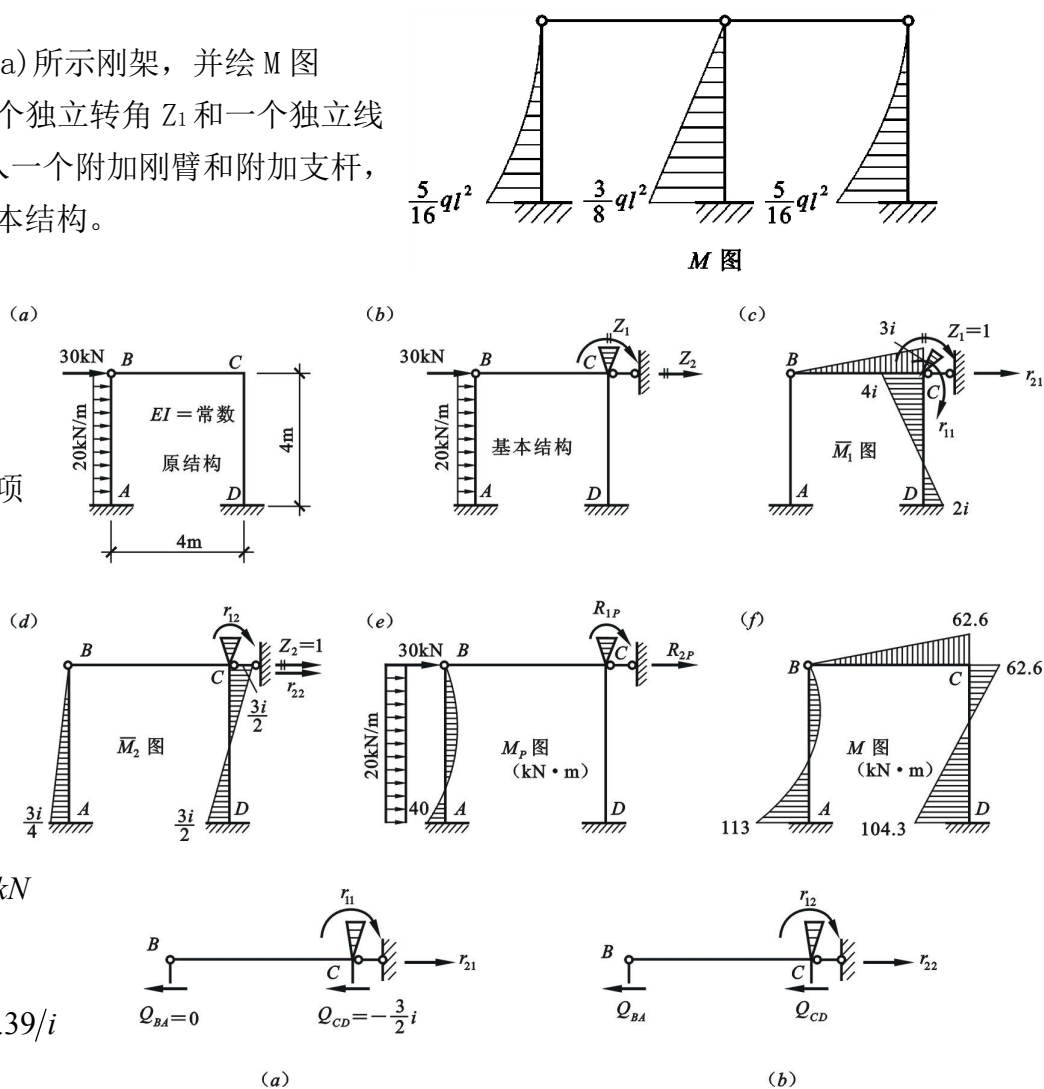
$$R_{1P} = 0$$

$$R_{2P} = -\frac{3}{8}ql - 30 = -60kN$$

(4) 求未知量

$$Z_1 = 20.87/i, \quad Z_2 = 97.39/i$$

(5) 绘制弯矩图



例 3. 用直接平衡法求刚架的弯矩图。

解：(1) 图示刚架有刚结点 C 的转角 Z_1 和结点 C、D 的水平线位移 Z_2 两个基本未知量。设 Z_1 顺时针方向转动， Z_2 向右移动。

(2) 求各杆杆端弯矩的表达式

$$M_{CA} = 4Z_1 - Z_2 + 3$$

$$M_{AC} = 2Z_1 - Z_2 - 3$$

$$M_{CD} = 3Z_1$$

$$M_{BD} = -0.5Z_2$$

(3) 建立位移法方程

有侧移刚架的位移法方程，有下述两种：

I. 与结点转角 Z_1 对应的基本方程为结点 C 的力矩平衡方程。

$$\sum M_C = 0, \quad M_{CA} + M_{CD} = 0 \Rightarrow 7Z_1 - Z_2 + 3 = 0$$

II. 与结点线位移 Z_2 对应的基本方程为横梁 CD 的截面平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad Q_{CA} + Q_{DC} = 0$$

取立柱 CA 为隔离体 (图(d))， $\sum M_A = 0$ ， $Q_{CA} = -\frac{6Z_1 - 2Z_2}{6} - \frac{1}{2}ql = -Z_1 + \frac{1}{3}Z_2 - 3$

同样，取立柱 DB 为隔离体 ((e))， $\sum M_B = 0$ ， $Q_{DB} = -\frac{-0.5Z_2}{6} = \frac{1}{12}Z_2$

代入截面平衡方程得 $-Z_1 + \frac{1}{3}Z_2 - 3 + \frac{1}{12}Z_2 = 0 \Rightarrow -Z_1 + \frac{5}{12}Z_2 - 3 = 0$

(4) 联立方程求未知量 $Z_1 = 0.91 \quad Z_2 = 9.37$

(5) 求杆端弯矩绘制弯矩图

将 Z_1 、 Z_2 的值回代杆端弯矩表达式求杆端弯矩作弯矩图。

例 4. 计算图(a)所示结构 C 点的竖向位移。

解：解法 (一) ——用典型方程求解

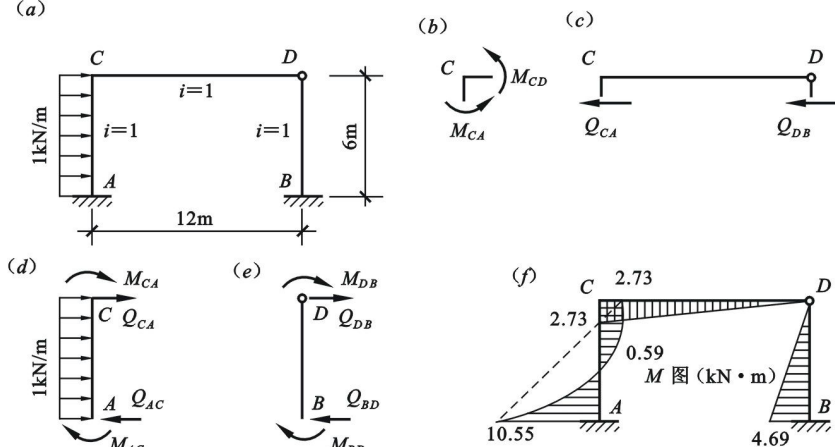
(1) 确定基本未知量。变截面处 C 点应作为刚结点，加刚臂及支杆得位移法基本结构如图(b)所示。其中未知量是 C 点角位移 Z_1 和 C 点的竖向线位移 Z_2 。

(2) 位移法典型方程 $r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \quad r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$

(3) 求各系数和自由项

$$r_{11} = 4i + 8i = 12i, \quad r_{12} = r_{21} = -\frac{12i}{l} + \frac{6i}{l} = -\frac{6i}{l}$$

$$r_{22} = \frac{24i}{l^2} + \frac{12i}{l^2} = \frac{36i}{l^2}, \quad R_{1P} = 0, \quad R_{2P} = -ql$$



(4) 求未知量

$$Z_1 = \frac{ql^3}{66EI}, \quad Z_2 = \frac{ql^4}{33EI}$$

Z_2 即为所求的 C 点的竖向位移。

解法 (二) —— 用直接平衡法求解

(1) 确定基本未知量为 C 点的角

位移 φ_C 和竖向线位移 Δ_C

(2) 求各杆杆端弯矩表达式

$$M_{CA} = 8i\varphi_C - \frac{12i}{l}\Delta_C + \frac{1}{12}ql^2,$$

$$Q_{CA} = -\frac{12i}{l}\varphi_C + \frac{24i}{l^2}\Delta_C - \frac{1}{2}ql,$$

$$M_{AC} = 4\varphi_C - \frac{12i}{l}\Delta_C - \frac{1}{12}ql^2, \quad M_{CB} = 4i\varphi_C + \frac{6i}{l}\Delta_C - \frac{1}{12}ql^2,$$

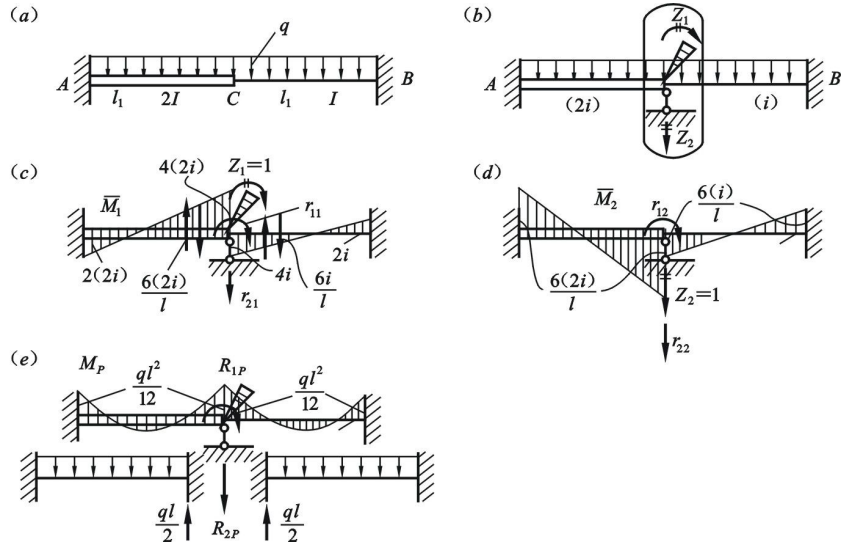
$$Q_{CB} = -\frac{6i}{l}\varphi_C - \frac{12i}{l^2}\Delta_C + \frac{1}{2}ql, \quad M_{BC} = 2\varphi_C - \frac{6i}{l}\Delta_C + \frac{1}{12}ql^2$$

(3) 建立位移法方程

$$\sum M_C = 0, \quad M_{CA} + M_{CB} = 0 \Rightarrow 12i\varphi_C - \frac{6i}{l}\Delta_C = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad Q_{CA} - Q_{CB} = 0 \Rightarrow -\frac{6i}{l}\varphi_C + \frac{36i}{l^2}\Delta_C - ql = 0$$

(4) 解方程求 φ_C 和 Δ_C $\varphi_C = \frac{ql^3}{66EI}, \quad \Delta_C = \frac{ql^4}{33EI}$



§ 7-7 用剪力分配法计算等高铰结排架

适用范围——适用于横梁刚度无穷大只有结点线位移的铰接排架或刚架（等高或不等高）

一、柱顶有水平集中荷载作用的计算

1. 取水平横梁为隔离体，由 $\sum F_x = 0$ 得 $P = \sum Q_i$

2. 求每根竖柱的柱顶剪力， $Q_i = \frac{3i}{l^2}\Delta = \frac{3EI_i}{h_i^3}Z$

$$\text{则 } P = \sum Q_i = \sum \frac{3EI_i}{h_i^3}Z \Rightarrow Q_i = \frac{\frac{3EI_i}{h_i^3}}{\sum \frac{3EI_i}{h_i^3}}P = \eta_i P$$

令 $\gamma_i = \frac{3EI_i}{h_i^3}$ ，称为抗侧移刚度系数； $\eta_i = \frac{\gamma_i}{\sum \gamma_i}$ 称为剪力分配系数。

3. 作柱的弯矩图。把每一根竖柱看成柱上端作用有集中荷载 Q_i 的悬臂梁作弯矩图。

对于刚架结构: $Q_i = \frac{12i}{l^2} \Delta = \frac{12EI_i}{h_i^3} Z$, $\gamma_i = \frac{12EI_i}{h_i^3}$

注意: 对多层多跨刚架, 当横梁刚度无穷大 ($EI \rightarrow \infty$) 时, 横梁可以看作无结点角位移的刚性梁, 此时同样可以用剪力分配法求刚架在水平结点荷载作用下的弯矩图。在工程中主要用于梁柱线刚度比 $i_b/i_c > 3$ 时的强梁弱柱式刚架在水平风荷载作用下的内力计算, 即反弯点法。

二、柱间有水平均布荷载作用的计算

1. 在柱顶增加一水平链杆, 使排架不产生水平位移, 由表 7.1 求得附加链杆的约束反力 R 。
2. 将力 R 取反方向后再作用在排架上, 利用剪力分配法求得各柱端剪力。
3. 将以上两种情况叠加, 求得最后结果。

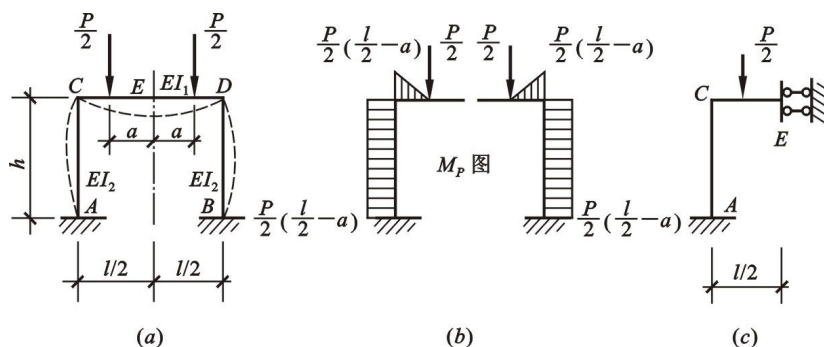
§ 7-8 对称性的利用

对称简化计算的另外一种方法——取半边结构, 减少结点位移数目以达到简化减少的目的。

一、奇数跨对称结构

1. 正对称荷载作用情况

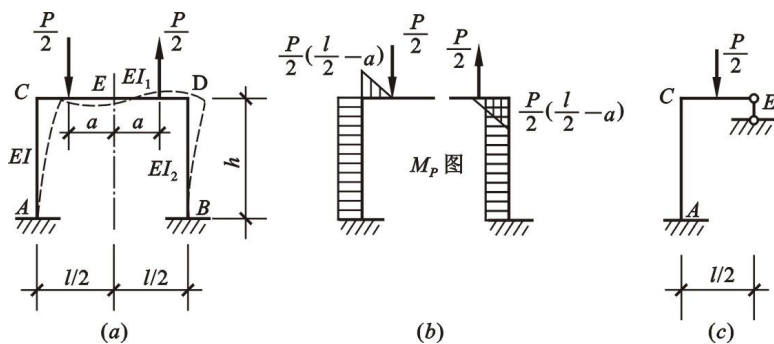
变形正对称, 对称轴截面不能水平移动, 也不能转动, 但是可以发生竖向移动。取半边结构时可以用滑动支座代替对称轴截面。



对称轴截面上一般有弯矩和轴力, 但没有剪力。

2. 反对称荷载作用情况

变形反对称, 对称轴截面在左半部分荷载作用下向下移动, 在右半部分荷载作用下向上移动, 但由于结构是一个整体, 在对称轴截面处不会上下错开, 故对称轴截面在竖直方向不会移动, 但是会发生水平移动和转动, 故可用链杆支座代替。

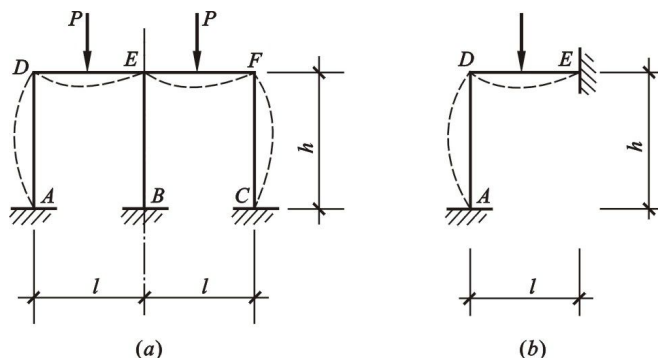


对称轴截面上无弯矩和轴力, 但一般有剪力。

二、偶数跨对称结构

1. 正对称荷载作用情况

变形正对称, 对称轴截面无水平位移和角位移, 又因忽略竖柱的轴向变形, 故对称轴截面也不会产生竖向线位移, 可以用固定端支座代替。



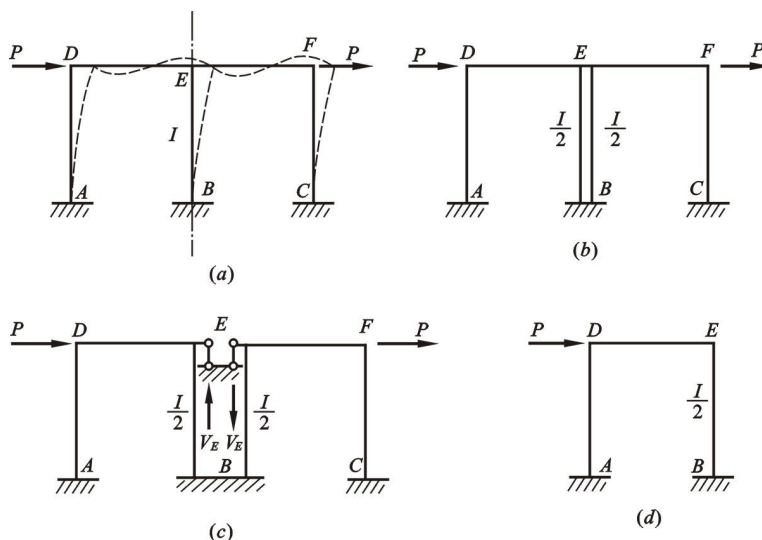
中柱无弯曲变形, 故不会产生弯矩和

剪力，但有轴力。对称轴截面对梁端来说一般存在弯矩、轴力和剪力，对柱端截面来说只有轴力。

2. 反对称荷载作用情况

变形反对称，中柱在左侧荷载作用下受压，在右侧荷载作用下受拉，二者等值反向，故**总轴力等于零**，对称轴截面不会产生竖向位移，但是会发生水平移动和转动，是由中柱的弯曲变形引起的。

中柱由左侧荷载和右侧荷载作用产生的弯曲变形的方向和作用效果相同，故中柱有弯曲变形并产生弯矩和剪力，取半边结构时可取原结构对称轴竖柱抗弯刚度的一半来计算。



三、无剪力分配法

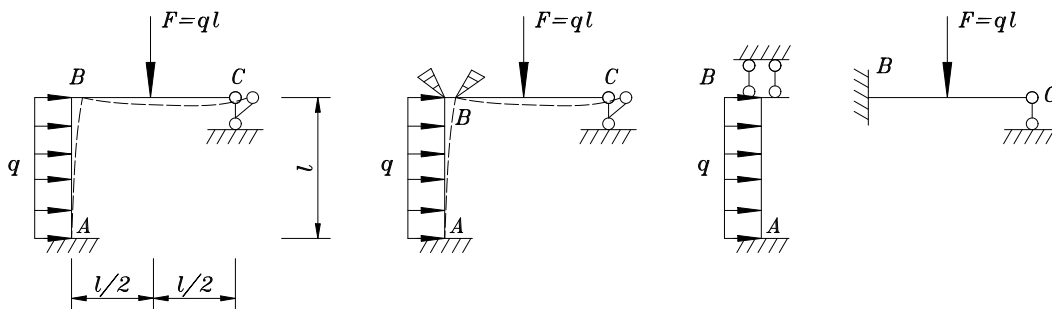
1. 适用范围：刚架中的侧移杆件（竖柱）都是剪力静定杆，既可求单层刚架，也可求多层。

剪力静定杆——下端固定，上端有侧移但该截面剪力为零，侧移对杆端内力无影响，可简化为下端固定上端滑动的超静定杆件。

2. 解题方法：可用位移法，也可用力矩分配法。

例 1. 已知 $EI = \text{常数}$ ，用无剪力分配法求图示刚架的弯矩图。

解：(1) 确定基本未知量为 B 点的角位移 Z_1



(2) 用直接平衡法求 Z_1

$$M_{BA} = iZ_1 - \frac{1}{6}ql^2 \quad M_{AB} = -iZ_1 - \frac{1}{3}ql^2 \quad M_{BC} = 3iZ_1 - \frac{3}{16}ql^2$$

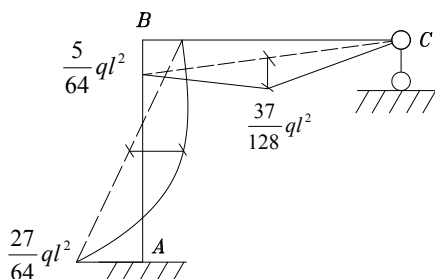
$$\sum M_B = 0, \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow 4iZ_1 - \frac{17}{48}ql^2 = 0 \Rightarrow Z_1 = \frac{17}{192}ql^2$$

(3) 代入杆端弯矩表达式，绘制弯矩图

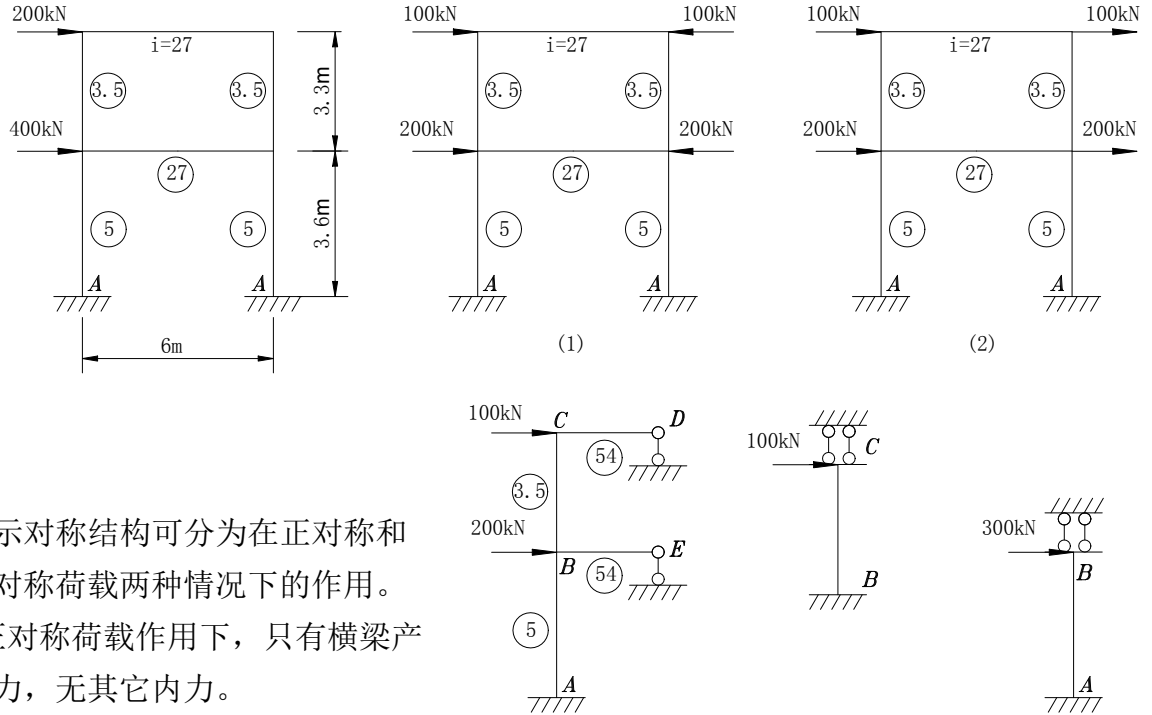
$$M_{BA} = iZ_1 - \frac{1}{6}ql^2 = -\frac{5}{64}ql^2$$

$$M_{BC} = 3iZ_1 - \frac{3}{16}ql^2 = \frac{5}{64}ql^2$$

$$M_{AB} = -iZ_1 - \frac{1}{3}ql^2 = -\frac{27}{64}ql^2$$



例 2. 利用对称性求下图刚架的弯矩图。



解: (1) 图示对称结构可分为在正对称和反对称荷载两种情况下的作用。
(2) 在正对称荷载作用下, 只有横梁产生轴力, 无其它内力。

(3) 在反对称荷载作用下, 可简化为下图的半边结构求解。

在半边结构中, 每一层竖柱均可看作下端固定、上端滑动的剪力静定杆, 而柱顶承受以上各层传来的剪力, 等于以上各层所有水平荷载之和。横梁则看作一端固定、一端铰支的梁。

(4) 由直接平衡法求半边结构。

确定基本未知量是 B、C 两点的结点角位移 Z_1 和 Z_2 , 列各杆端的弯矩表达式。

$$M_{BA} = iZ_1 - \frac{1}{2}Pl = 5Z_1 - 540$$

$$M_{AB} = -iZ_1 - \frac{1}{2}Pl = -5Z_1 - 540$$

$$M_{BC} = 3.5Z_1 - 3.5Z_2 - 165$$

$$M_{BE} = 3 \times 54Z_1 = 162Z_1$$

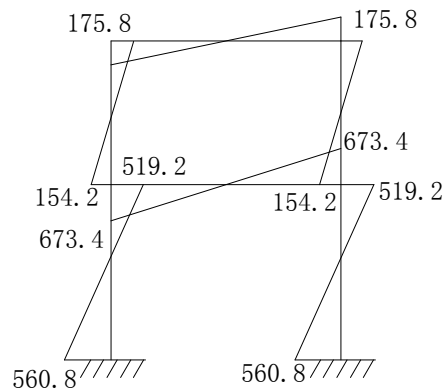
$$M_{CB} = 3.5Z_2 - 3.5Z_1 - 165$$

$$M_{CD} = 3 \times 54Z_2 = 162Z_2$$

$$\sum M_B = 0, \quad M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} = 0 \Rightarrow 170.5Z_1 - 3.5Z_2 - 705 = 0$$

$$\sum M_C = 0, \quad M_{CB} + M_{CD} = 0 \Rightarrow 165.5Z_2 - 3.5Z_1 - 165 = 0$$

联立求解得 $Z_1 = 4.157$; $Z_2 = 1.085$, 代入求杆端弯矩绘制弯矩图。



第八章 力矩分配法及连续梁的影响线

§ 8-1 力矩分配法的基本概念

一、概述

1. 定义——力矩分配法是建立在位移法基础上的一种渐近法，在计算过程中需要采取逐次修正的步骤，计算轮次越多，结果精度越高。
2. 适用范围——无侧移结构，即多跨连续梁和无侧移刚架。
3. 正负号规定——杆端转角、杆端内力正负号规定同位移法。

二、几个概念

1. 转动刚度 S_{AB}

- (1) 定义——杆端对转动的抵抗能力，等于使杆端产生单位转角时需要施加的力矩，可用杆端产生单位转角时在杆端引起的杆端弯矩代替，与杆件的线刚度和远端支承情况有关。

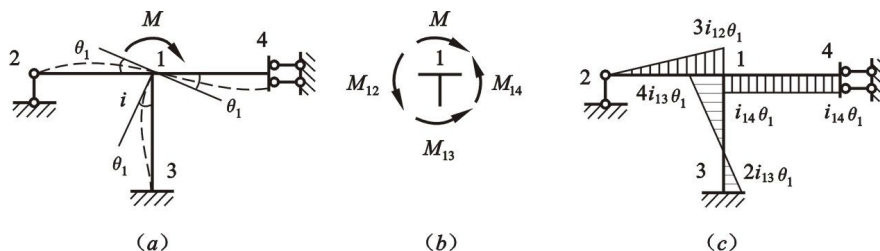
(2) 四种情况

远端固定 $S_{AB} = 4i$ ；远端铰支 $S_{AB} = 3i$ ；远端滑动 $S_{AB} = i$ ；远端自由 $S_{AB} = 0$

2. 力矩分配系数 μ_{Aj}

- (1) 定义式：
$$\mu_{Aj} = \frac{S_{Aj}}{\sum S_{Aj}}$$

- (2) $\sum \mu_{Aj} = 1$



如图(a)所示刚架，其上各杆件均为等截面直杆。刚结点不发生线位移只有角位移，我们称它为力矩分配法的一个**计算单元**。

设在该单元的结点 1 作用一集中力偶 M (结点外力偶以顺时针转向为正)，现要求出汇交于结点 1 之各杆的杆端弯矩值。对此我们称之为力矩分配法的**基本运算**。

$$\sum M_1 = 0, \quad M_{12} + M_{13} + M_{14} = 0 \Rightarrow M - (3i_{12} + 4i_{13} + i_{14})\theta_1 = 0 \quad \text{求得} \quad \theta_1 = \frac{M}{3i_{12} + 4i_{13} + i_{14}}$$

$$\text{则} \quad M_{12} = 3i_{12}\theta_1 = \frac{3i_{12}}{3i_{12} + 4i_{13} + i_{14}} M, \quad M_{13} = 4i_{13}\theta_1 = \frac{4i_{13}}{3i_{12} + 4i_{13} + i_{14}} M,$$

$$M_{14} = i_{14}\theta_1 = \frac{i_{14}}{3i_{12} + 4i_{13} + i_{14}} M, \quad M_{21} = 0, \quad M_{31} = 2i_{13}\theta_1, \quad M_{41} = -i_{14}\theta_1$$

3. 传递系数 C_{AB}

- (1) 定义式： $C_{AB} = \frac{M_{BA}}{M_{AB}}$ ，即杆件近端有转角时，远端弯矩与近端弯矩的比值，也可写成

$$M_{BA} = C_{AB} M_{AB}。$$

(2) 三种情况

远端固定 $C_{AB} = \frac{1}{2}$; 远端铰支 $C_{AB} = 0$; 远端滑动 $C_{AB} = -1$

三、单结点力矩分配法的步骤

1. 在发生转角位移的刚结点 i 处假想加入附加刚臂, 使其不能转动。由表 17.1 求出汇交于 i 结点各杆端的固端弯矩后, 利用该结点的力矩平衡条件求出附加刚臂中的约束力矩, 它等于汇交于该结点各杆的固端弯矩之和, 并以 M_i^F 表示。约束力矩规定以顺时针转向为正。

2. 结点 i 处并没有附加刚臂, 也不存在约束力矩, 为了能恢复到实际状态, 抵消掉约束力矩 M_i^F 的作用, 我们在结点 i 处施加一个与它反向的外力偶 $-M_i^F$, 放松附加刚臂, 使结点转动。

结构在 $-M_i^F$ 作用下的各杆端弯矩, 应用一次基本运算即可求出。

3. 结构的实际受力状态, 为以上两种情况的叠加。将第 1 步中各杆端的固端弯矩分别和第 2 步中各杆端的分配弯矩或传递弯矩叠加, 即得各杆的近端或远端的最后弯矩。

例 1. 试作图 (a) 所示连续梁的弯矩图。

解: (1) 先在结点 B 加一附加刚臂使结点 B 不能转动, 此步骤常称为“固定结点”。此时各杆端产生的固端弯矩由表 17.1 求得:

$$M_{BA}^F = \frac{1}{8}ql^2 = 180\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{1}{8}Pl = -100\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB}^F = \frac{1}{8}Pl = 100\text{kN}\cdot\text{m}$$

由结点 B 的平衡条件求得约束力矩:

$$\sum M_B = 0, \quad M_B^F = 180 - 100 = 80\text{kN}\cdot\text{m}$$

(2) 在结点 B 处加入一个 $M_B = -M_B^F = -80\text{kN}\cdot\text{m}$,

可用上述力矩分配法的基本运算求出各杆端弯矩。

① 先求出各杆端分配系数:

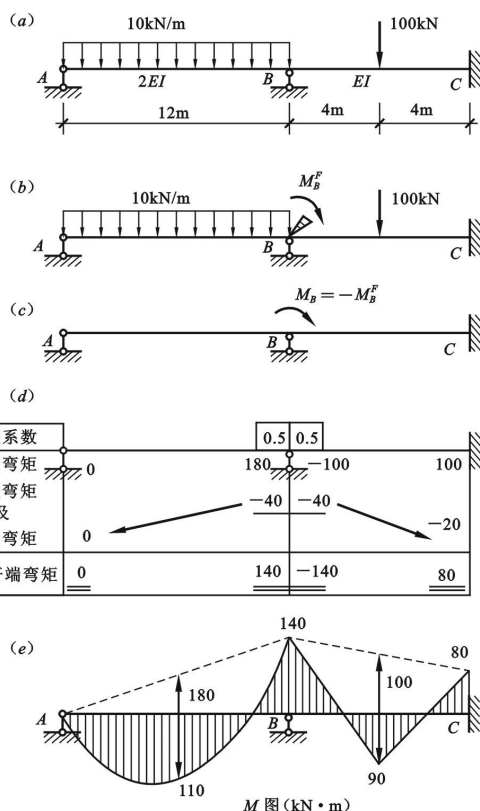
$$i_{BA} = \frac{2EI}{12} = \frac{EI}{6}, \quad i_{BC} = \frac{EI}{8}$$

$$S_{BA} = 3i_{BA} = 3 \times \frac{EI}{6} = \frac{EI}{2}, \quad S_{BC} = 4i_{BC} = 4 \times \frac{EI}{8} = \frac{EI}{2}$$

$$\text{则 } \mu_{BA} = \frac{S_{BA}}{S_{BA} + S_{BC}} = 0.5, \quad \mu_{BC} = \frac{S_{BC}}{S_{BA} + S_{BC}} = 0.5$$

② 对 $M_B = -M_B^F$ 进行力矩分配得各杆端的分配力矩:

$$M_{BA}^\mu = \mu_{BA}M_B = 0.5 \times (-80) = -40\text{kN}\cdot\text{m}, \quad M_{BC}^\mu = \mu_{BC}M_B = 0.5 \times (-80) = -40\text{kN}\cdot\text{m}$$



然后计算各杆远端的传递弯矩：

$$M_{AB}^C = C_{BA} M_{BA}^\mu = 0 \quad M_{CB}^C = C_{BC} M_{BC}^\mu = 0.5 \times (-40) = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 最后将各杆端的固端弯矩(图(b))与分配弯矩、传递弯矩(图(c))相加, 即得各杆端的最后弯矩值。

例 2. 用力矩分配法作图(a)所示封闭框架的弯矩图。已知各杆 EI 等于常数。

【解】因该封闭框架的结构和荷载均有 x、y 两个对称轴, 可以只取四分之一结构计算如图(b)所示。作出该部分弯矩图后, 其余部分根据对称结构承受对称荷载作用弯矩图亦应是对称的关系便可作出。

(1) 计算固端弯矩

由表 17.1 得各杆的固端弯矩为

$$M_{1A}^F = -\frac{1}{3}ql^2 = -7.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{A1}^F = -\frac{1}{6}ql^2 = -3.75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

写入图(c)各相应杆端处。

(2) 计算分配系数

转动刚度:

$$S_{1A} = i_{1A} = \frac{EI}{3/2} = \frac{2EI}{3}$$

$$S_{1C} = i_{1C} = \frac{EI}{1} = EI$$

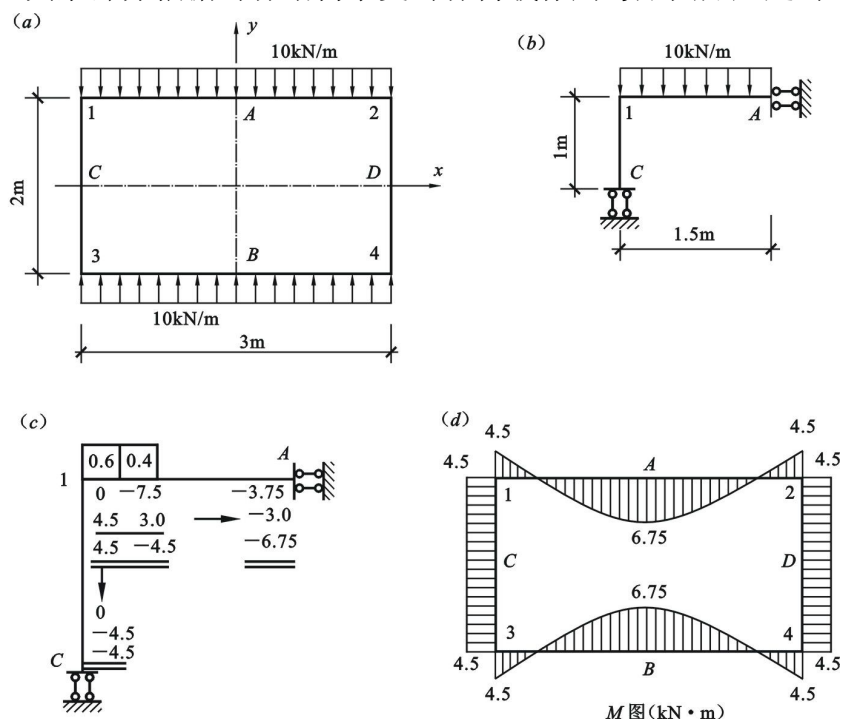
分配系数:

$$\mu_{1A} = \frac{S_{1A}}{S_{1A} + S_{1C}} = 0.4$$

$$\mu_{1C} = \frac{S_{1C}}{S_{1A} + S_{1C}} = 0.6 \quad \text{将分配系数写入图(c)结点 1 处。}$$

(3) 进行力矩的分配和传递, 求最后杆端弯矩。

(4) 作弯矩图。根据对称关系作出弯矩图如图(d)所示。



§ 8-2 用力矩分配法计算多结点连续梁和无侧移刚架

对于具有多个刚结点的连续梁和无侧移的刚架, 只要逐次对每一个结点应用上一节的基本运算, 就可求出各杆端弯矩。计算步骤如下:

1. 计算汇交于各结点的各杆端的分配系数, 并确定传递系数。
2. 根据荷载计算各杆端的固端弯矩及各结点的约束力矩。
3. 逐次循环放松各结点, 并对每个结点按分配系数将约束力矩反号分配给汇交于该结点的各杆, 然后将各杆端的分配弯矩乘以传递系数传递至另一端。按此步骤循环计算直至各结点上的传递弯矩小到可以略去时为止。
4. 将各杆端的固端弯矩与历次的分配弯矩和传递弯矩相加, 即得各杆端的最后弯矩。

5. 绘弯矩图，进而可作剪力图和轴力图。

例 1. 试用力矩分配法作图(a)所示连续梁的弯矩图。

解：(1) 计算分配系数

$$\text{结点 B: } S_{BA} = 3i_{BA} = 3 \times \frac{4EI}{2} = 6EI; \quad S_{BC} = 4i_{BC} = 4 \times \frac{9EI}{3} = 12EI$$

$$\mu_{BA} = \frac{S_{BA}}{S_{BA} + S_{BC}} = \frac{1}{3}; \quad \mu_{BC} = \frac{S_{BC}}{S_{BA} + S_{BC}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{结点 C: } S_{BC} = S_{CB} = 12EI; \quad S_{CD} = 4i_{CD} = 4 \times \frac{4EI}{2} = 8EI$$

$$\mu_{CB} = \frac{S_{CB}}{S_{CB} + S_{CD}} = 0.6; \quad \mu_{CD} = \frac{S_{CD}}{S_{CB} + S_{CD}} = 0.4$$

(2) 计算固端弯矩

$$M_{BA}^F = \frac{3}{16} Pl = 18.75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{1}{12} ql^2 = -15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB}^F = -\frac{1}{12} ql^2 = -15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 进行力矩的分配与传递，求杆端最终弯矩并绘制弯矩图。

对于具有多个刚结点的结构，可按任意选定的次序轮流放松结点，但为了使计算收敛得快些，通常先分配约束力矩较大的结点。即从结点 C 开始进行力矩分配并向远端传递，然后对 B 点进行力矩分配与传递。

按照上述步骤，在结点 C 和 B 轮流进行第二次力矩分配与传递，计算结果填入图(b)相应位置。这样轮流放松、固定各结点，进行力矩分配与传递。

由上看出，经过两轮计算后，结点的约束力矩已经很小，附加刚臂的作用基本解除，结构已接近于实际的平衡状态，若认为已经满足计算精度要求时，计算工作便可以停止。

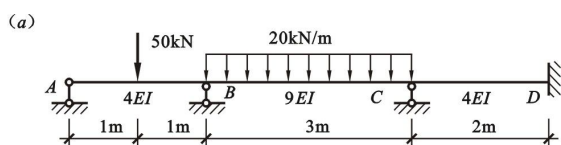
例 2. 试用力矩分配法作图(a)所示连续梁的弯矩图。

解：(1) 计算分配系数

$$\text{结点 B: } \mu_{BA} = \frac{S_{BA}}{S_{BA} + S_{BC}} = 0.6; \quad \mu_{BC} = \frac{S_{BC}}{S_{BA} + S_{BC}} = 0.4$$

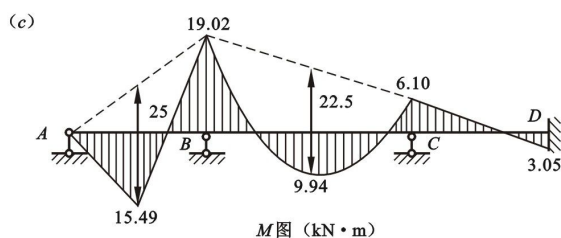
$$\text{结点 C: } \mu_{CB} = \frac{S_{CB}}{S_{CB} + S_{CD}} = 0.5; \quad \mu_{CD} = \frac{S_{CD}}{S_{CB} + S_{CD}} = 0.5$$

$$\text{结点 D: } \mu_{DC} = \frac{S_{DC}}{S_{DC} + S_{DE}} = 0.4; \quad \mu_{DE} = \frac{S_{DE}}{S_{DC} + S_{DE}} = 0.6$$



(b)

分配系数		1/3	2/3		3/5	2/5	
固端弯矩	0	18.75	-15		15	0	0
分配弯矩			-4.5		-9	-6	-3
及		0.25	0.50		0.25		
传递弯矩		0.02	0.05		0.15	-0.10	-0.05
最后杆端弯矩	0	19.02	-19.02		6.10	-6.10	-3.05



结点 E: $S_{EF} = 0$; $\mu_{ED} = \frac{S_{ED}}{S_{ED} + S_{EF}} = 1$; $\mu_{EF} = 0$

(2) 计算固端弯矩

$$M_{BC}^F = -\frac{Pab^2}{l^2} = -80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB}^F = \frac{Pa^2b}{l^2} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

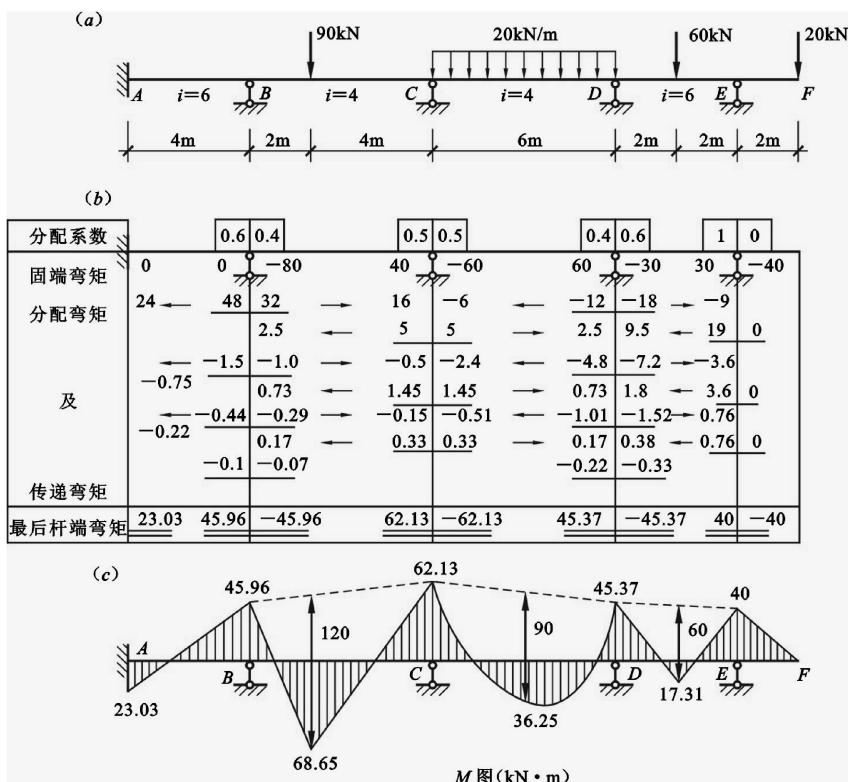
$$M_{CD}^F = -\frac{ql^2}{12} = -60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DC}^F = \frac{ql^2}{12} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DE}^F = -\frac{Pl}{8} = -30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{ED}^F = \frac{Pl}{8} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{EF}^F = -Pl = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(3) 按先 B、D 后 C、E 的顺序，依次在结点处进行力矩分配与传递，并求得各杆端的最后弯矩，如图 (b) 所示。

(4) 作 M 图根据各杆端弯矩和荷载，用叠加法作弯矩图如图 (c) 所示。

例 3. 试作图 (a) 所示刚架的内力图。

解: (1) 计算分配系数

结点 B: $\mu_{BA} = 0.333$; $\mu_{BC} = 0.667$

结点 C: $\mu_{CB} = 0.4$; $\mu_{CD} = 0.2$;

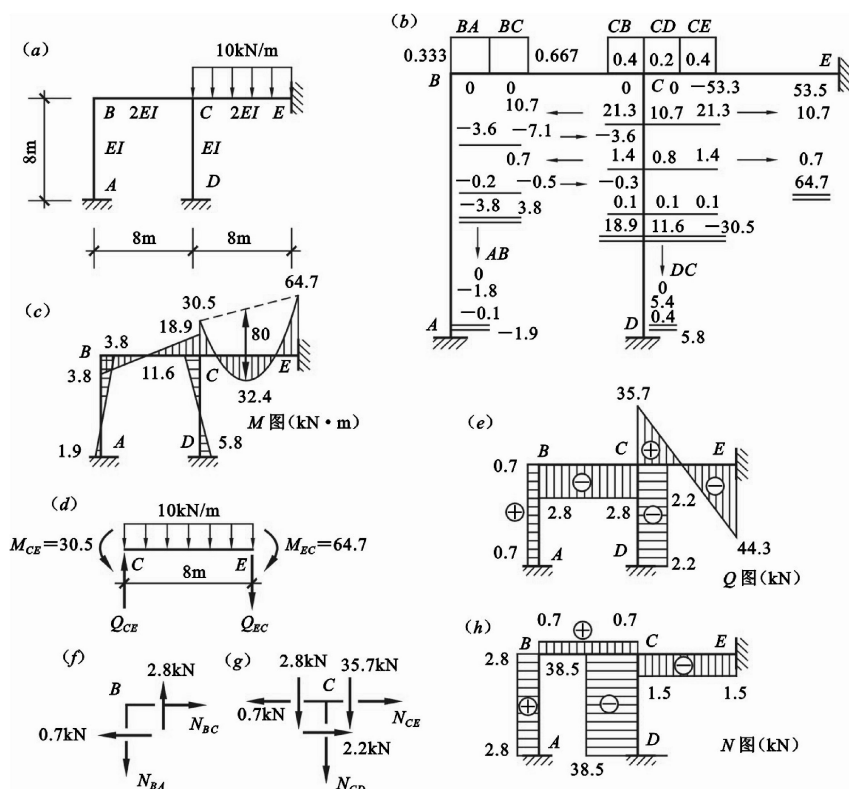
$$\mu_{CE} = 0.4$$

(2) 计算固端弯矩

$$M_{CE}^F = -\frac{ql^2}{12} = -53.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{EC}^F = \frac{ql^2}{12} = 53.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 在结点 C、B 循环交替进行力矩分配与传递，并通过叠加求得各杆端最后弯矩，计算过程



如图(b)所示。

(4) 作 M 图根据杆端最后弯矩和荷载作弯矩图如图(c)所示。

(5) 作 Q 图根据各杆的杆端弯矩及杆上的荷载，逐杆求出杆端剪力作剪力图。

(6) 作轴力图利用结点力的平衡条件，由杆端剪力求出杆端轴力作轴力图。

例 4. 利用对称性求图示刚架的弯矩图。

解：(1) 利用对称性取半边结构进行计算

(2) 计算分配系数

$$\text{结点 A: } S_{AG} = i_{AG} = \frac{2EI}{1.5} = \frac{4}{3}EI$$

$$S_{AC} = 4i_{AC} = 4 \times \frac{EI}{3} = \frac{4}{3}EI$$

$$\mu_{AG} = \mu_{AC} = 0.5$$

$$\text{结点 C: } S_{CA} = 4i_{CA} = 4 \times \frac{EI}{3} = \frac{4}{3}EI$$

$$S_{CE} = 4i_{CE} = 4 \times \frac{EI}{3} = \frac{4}{3}EI$$

$$S_{CH} = i_{CH} = \frac{EI}{1.5} = \frac{2}{3}EI$$

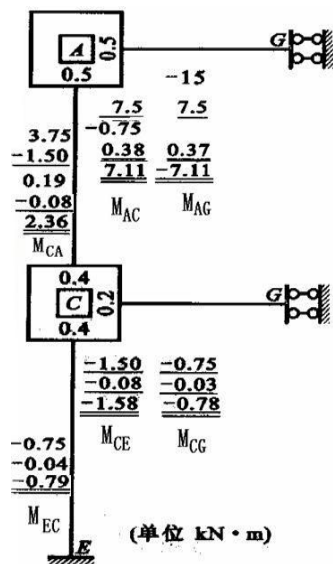
$$\mu_{CA} = \mu_{CE} = 0.4 \quad \mu_{CH} = 0.2$$

(3) 计算固端弯矩

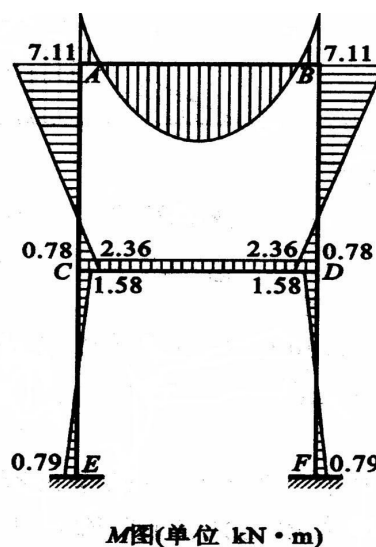
$$M_{AG}^F = -\frac{ql^2}{3} = -15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{GA}^F = -\frac{ql^2}{6} = -7.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(4) 进行力矩分配与传递



(5) 利用对称性绘制弯矩图



例 5. 图示等截面连续梁， $EI=36000\text{KN} \cdot \text{m}^2$ ，在荷载作用下，要使梁中间跨的最大正弯矩和支座负弯矩绝对值相等，B、C 支座应升降多少？

解：(1) 利用对称取半边结构计算

(2) 设 B、C 下沉位移为 Δ

(3) 用力矩分配法求解

①求固端弯矩

$$M_{BA}^F = \frac{ql^2}{8} - \frac{3i}{l}\Delta = 81 - 3000\Delta$$

$$M_{BE}^F = -\frac{ql^2}{3} = -96kN \cdot m$$

$$M_{EB}^F = -\frac{ql^2}{6} = -48kN \cdot m$$

②求分配系数

$$S_{BA} = 3i_{BA} = 3 \times \frac{EI}{6} = \frac{EI}{2}$$

$$S_{BE} = i_{BE} = \frac{EI}{4}$$

$$\mu_{BA} = \frac{2}{3} \quad \mu_{BE} = \frac{1}{3}$$

③进行力矩分配与传递，求最后弯矩

$$M_B = -91 + 1000\Delta \quad M_E = -53 - 1000\Delta \quad \text{令 } M_B = M_E \Rightarrow \Delta = 0.019m(\downarrow)$$

例 6. 已知 EI =常数，用无剪力分配法求图示刚架的弯矩图。

解: (1) 求力矩分配系数

$$S_{BC} = 3i_{BC} = 3 \times \frac{EI}{l} = 3i$$

$$S_{BA} = \frac{EI}{l} = i$$

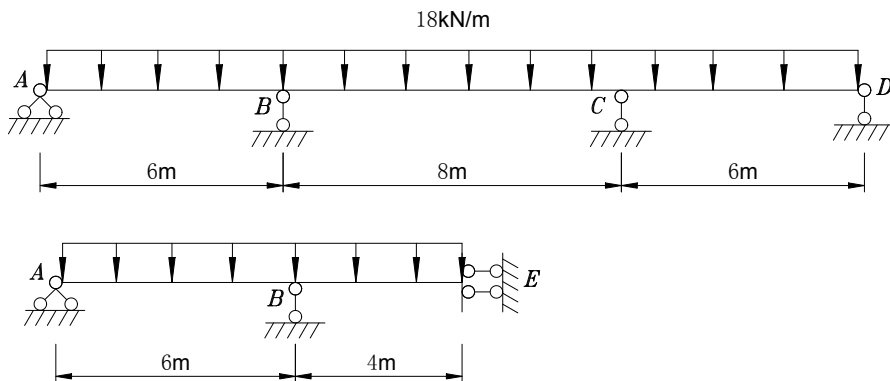
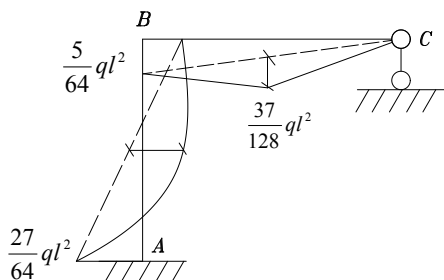
$$\mu_{BA} = 0.25 \quad \mu_{BC} = 0.75$$

(2) 求固端弯矩

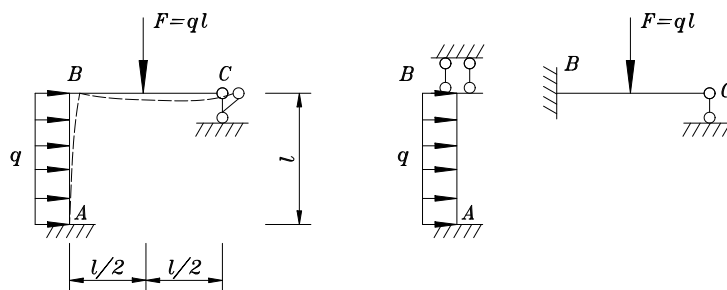
$$M_{BA}^F = -\frac{ql^2}{6}, \quad M_{AB}^F = -\frac{ql^2}{3},$$

$$M_{BC}^F = -\frac{3Pl}{16} = -\frac{3}{16}ql^2$$

(3) 力矩分配与传递，绘制弯矩图。



分配系数	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
固端弯矩	$81 - 3000\Delta$	-96 -48
分配与传递	$10 + 2000\Delta$	$5 + 1000\Delta$ $-5 - 1000\Delta$
最后弯矩	$91 - 1000\Delta$	$-91 + 1000\Delta$ $-53 - 1000\Delta$



0.25	0.75
$-\frac{ql^2}{6}$	$-\frac{3ql^2}{16}$
$\frac{17ql^2}{192}$	$\frac{51ql^2}{192}$
$-\frac{5ql^2}{64}$	$\frac{5ql^2}{64}$
$-\frac{ql^2}{3}$	
$-\frac{17ql^2}{192}$	
$-\frac{27ql^2}{64}$	

§ 8-3 连续梁影响线及内力包络图

一、用机动法绘制连续梁影响线的轮廓

1. 静定梁和多跨连续梁影响线的比较

- (1) 静定梁的影响线：反力和内力影响线都是直线，其竖标计算简单，可用静力法或机动法。
- (2) 多跨连续梁的影响线：反力和内力影响线都是曲线，其竖标计算复杂。用静力法求解时必须先计算超静定结构，再求影响线方程，非常复杂；用机动法可以比较方便地绘制出影响线的轮廓，进一步确定活荷载的最不利位置。

2. 连续梁影响线的绘制——机动法

二、连续梁的内力包络图

求梁各截面最大内力的主要问题在于**确定活载的影响**。只要求出活载作用下某一截面的最大和最小内力，然后再加上恒载产生的内力，即可得到两者共同作用下该截面的最大和最小内力。把梁上各截面的最大内力和最小内力的竖标连一光滑曲线，就得到连续梁的内力包络图。

弯矩包络图的绘制步骤如下：

- (1) 作出恒载作用下的弯矩图。
- (2) 依次按每一跨上单独布满活载的情况，逐一作出弯矩图。
- (3) 将各跨分为若干等份，对每一等份截面处，将恒载弯矩图中该截面的竖标值和所有各个活载弯矩图中该截面所对应的正(或负)竖标值相叠加，得到该截面的最大(或最小)弯矩。
- (4) 将各截面的最大(小)弯矩值在同一图中按同一比例尺用竖标标出，并以曲线相连，即得所求弯矩包络图。

例 1. 求图(a)所示三跨等截面连续梁的弯矩包络图和剪力包络图。梁上承受的恒载为

$$q = 20 \text{ kN/m}, \text{ 活载 } P = 37.5 \text{ kN/m}.$$

解：(1) 作弯矩包络图

- ① 用力矩分配法作出恒载作用下的弯矩图如图(b)所示。
- ② 用力矩分配法作出各跨分别单独布满活载时的弯矩图，如图(c)、(d)、(e)所示。
- ③ 将连续梁的每一跨分为若干等份(现分为四等份)，求出各弯矩图中等分点处的竖标值，如图(b)、(c)、(d)、(e)所示。
- ④ 将恒载弯矩图(图(b))中的竖标与所有各种活载弯矩图(图(c)、(d)、(e))中对应的正(负)竖标值相加，即得各截面的最大(小)弯矩值。例如，第一跨跨中截面 2 处：

$$M_{2\max} = 84.0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_{2\min} = 9.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

在支座 B 处： $M_{B\max} = -22.0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_{B\min} = -102.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$

- ⑤ 将各截面的最大弯矩值和最小弯矩值在同一图中按同一比例用竖标标出，并分别连以曲线，即得到弯矩包络图如图(f)所示。

(2) 作剪力包络图

- ① 利用已作出的弯矩图及杆上荷载可作出恒载作用下的剪力图如图(a)所示。

② 同样可分别作出各跨单独布满活载时的剪力图如图(b)、(c)、(d)所示。

③ 将恒载剪力图各支座左、右两侧截面处的竖标值与所有各种活载剪力图对应的正(负)竖标值相加,便得到相应截面的最大(最小)剪力值。

例如在支座 B 的左侧截面上: $Q_{B \max}^{\pm} = -45.5 \text{ kN}$, $Q_{B \min}^{\pm} = -140.5 \text{ kN}$

④ 把各跨两端截面上的最大剪力值和最小剪力值分别用直线相连,即得剪力包络图如图(e)所示。

